

ریاضیات ۱

شامل بیش از ۶۰۰ مثال و ۷۴۰ تمرین

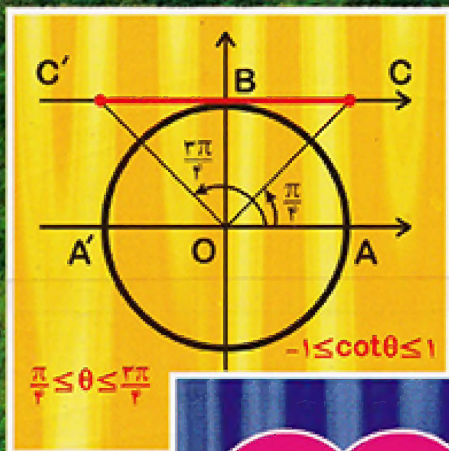
حسین انصاری - سیامک قادر

قابل استفاده

دانش آموزان و دبیران

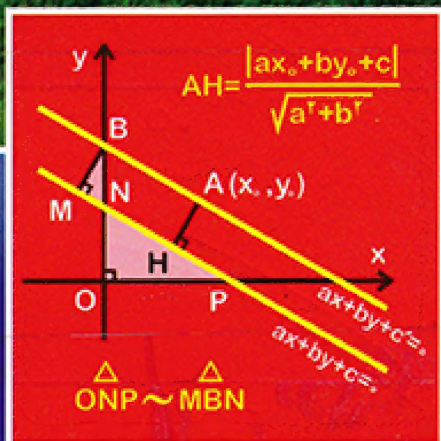
مدارس ممتاز و

مراکز استعدادهای درخشان



$$A \Delta B =$$

$$(A - B) \cup (B - A)$$



ریاضیات (۱)

ویرایش چهارم

قابل استفاده دانش آموزان و دبیران مدارس ممتاز
و مراکز استعدادهای درخشان

حسین انصاری - سیامک قادر

سرشناسه	انصاری، حسین
عنوان و پدیدآور	ریاضیات ۱ قابل استفاده دانش آموزان و دبیران مدارس ممتاز...
مشخصات نشر	تألیف /حسین انصاری- سیامک قادر
مشخصات ظاهری	تهران؛ مبتکران؛ پیشروان ۱۳۹۰
شابک	۴۰۴ ص؛ مصور، جدول.
موضوع	۵-۱۱۵۴-۷-۹۶۴-۹۷۸
موضوع	ریاضیات -- کتاب‌های درسی -- راهنمای آموزشی (متوسطه).
رده‌بندی کنگره	ریاضیات -- پرسش‌ها و پاسخ‌ها (متوسطه).
رده‌بندی دیویی	۸۱۳۸۶ / ج ۵ / پ ۵۶ LB
شماره کتابشناسی ملی	۵۱۰/۷۶
	۱۶۹۵۱-۸۸ م



پیشروان (پروانه نشر: ۲۶۲۳)

(پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)



ریاضیات (۱)

مؤلفان: حسین انصاری - سیامک قادر

نوبت چاپ: شصت و سوم ۱۳۹۰ (چاپ اول: پاییز ۱۳۷۹)

ویراست: چهارم

شمارگان: ۳۰۰۰ جلد

حروف نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: مبتکران

قیمت: ۶۶۰۰ تومان

چاپ: ولیعصر

حقوق چاپ و نشر، محفوظ و مخصوص ناشر است و هرگونه کپی برداری و نقل مطالب بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد.

مرکز پخش: تهران میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۵۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

www.mobtakeran.com

تلفن: ۶۴۹۱ دورنگار ۶۶۴۰۶۳۶۲

به نام هستی‌بخش

مقدمه

سپاس بیکران خدای یکتا را که توفیق و پیراست سوم این اثر را در دهمین سالگرد انتشار آن به ما عطا فرمود. تاکنون حدود ۲۰۰۰۰۰ نسخه از این کتاب چاپ و در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته. مدارس برتر و دانش‌آموزان سرآمد از آن بهره‌جسته‌اند و به خاطر این امر به خود می‌بالیم.

سعی شده در ویرایش جدید، کتاب به سرفصل‌های جدید آموزشی نزدیک‌تر باشد. فصل اول کتاب قبلی (منطق ریاضی) را حذف نموده‌ایم. تمارین جدیدی را به آن افزوده‌ایم و نهایت کوشش را به خرج داده‌ایم تا کتاب، بی‌عیب و نقص باشد. اما به هر حال همواره این هدف به صورت آرمانی برایمان بوده که کم‌تر به آن دست یافته‌ایم. لذا از حضور سروران عزیزی که کتاب را تورق می‌نمایند خواهشمندیم موارد اصلاحی را متذکر گردند تا بتوانیم در چاپ‌های بعدی از آن استفاده نماییم.

از تمام دوستانی که ما را با ارسال پیام‌های خویش مورد لطف و محبت قرار داده‌اند تشکر می‌نماییم و از مسئولان دلسوز مؤسسه‌ی انتشاراتی مبتکران به ویژه جناب آقای دهقانی مدیریت محترم آن انتشارات که همواره ما را تشویق بر رفع کاستی‌ها نموده‌اند قدردانی می‌نماییم.

تابستان ۹۰

انصاری - قادر

(تلفن تماس با مؤلفان: ۴۴۲۵۲۳۷۰ می‌باشد.)

فصل اول

۱	مجموعه‌ی اعداد.....
۲	خواص جمع و ضرب اعداد طبیعی
۳	مجموعه‌ی اعداد صحیح
۵	مجموعه‌ی اعداد گویا
۹	نماد متعارفی و اعشاری
۹	تبدیل نماد متعارفی به نماد اعشاری
۱۴	تبدیل نماد اعشاری به نماد متعارفی
۱۶	راه حل تستی برای تبدیل نماد اعشاری به کسر متعارفی
۱۹	مجموعه‌ی اعداد حقیقی
۲۰	اصول موضوعه اعداد حقیقی
۲۱	تمرین‌های فصل اول

فصل دوم

۲۷	مجموعه
۲۸	مجموعه‌ی تهی
۲۸	صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه
۳۱	زیرمجموعه
۳۳	تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه
۳۵	زیرمجموعه‌ی محض
۳۶	مجموعه‌ی توان یک مجموعه
۳۷	تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی
۳۸	تساوی دو مجموعه
۳۸	مجموعه‌ی مرجع

۳۹	متمم یک مجموعه
۴۱	اجتماع دو مجموعه
۴۳	اشتراک دو مجموعه
۴۶	دو مجموعه‌ی جدا از هم
۴۷	خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه
۵۰	اثبات قوانین جذب
۵۴	عمل تفاضل
۵۹	عمل تفاضل متقارن
۵۹	خواص تفاضل متقارن دو مجموعه
۶۱	دو مجموعه‌ی هم‌ارز
۶۲	تعریف قطعه‌ای از اعداد طبیعی
۶۲	مجموعه‌ی متناهی
۶۲	عدد اصلی یک مجموعه
۶۳	مجموعه‌ی نامتناهی
۶۵	مجموعه‌ی شمارا (شمارشپذیر)
۶۷	عدد اصلی اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی
۶۸	بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل
۷۰	تمرین‌های فصل دوم

فصل سوم

۸۳	توان
۸۳	قوانین محاسبه‌ی اعداد توان‌دار
۹۱	معادلات توانی
۹۳	تجزیه‌ی اعداد طبیعی به عوامل اول
۹۳	قضیه‌ی بنیادی حساب

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب. م. م)	۹۵
محاسبه‌ی ب. م. م دو عدد به کمک تجزیه	۹۵
دو عدد متباین (نسبت به هم اول)	۹۶
کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)	۹۶
محاسبه‌ی ک. م. م دو عدد به کمک تجزیه	۹۶
نماد علمی	۹۸
تمرین‌های فصل سوم	۱۰۰

فصل چهارم

چندجمله‌ای‌ها	۱۰۷
عبارت جبری	۱۰۷
عبارات جبری معین و نامعین	۱۰۷
اقسام عبارت‌های جبری	۱۰۸
حوزه‌ی تعریف یک عبارت جبری	۱۰۹
مقدار عددی یک عبارت جبری	۱۱۰
یک‌جمله‌ای جبری	۱۱۱
یک‌جمله‌ای متشابه	۱۱۲
جمع و تفریق یک‌جمله‌ای‌های جبری	۱۱۲
ضرب (تقسیم) یک‌جمله‌ای جبری در یک عدد	۱۱۲
ضرب یک‌جمله‌ای‌ها	۱۱۲
تقسیم یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای	۱۱۴
بخش‌پذیری یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای	۱۱۴
چندجمله‌ای	۱۱۵
درجه‌ی چندجمله‌ای	۱۱۵
مجموع ضرایب چندجمله‌ای	۱۱۵

چندجمله‌ای همگن	۱۱۶
چندجمله‌ای متقارن	۱۱۶
چندجمله‌ای زوج و چندجمله‌ای فرد	۱۱۷
چندجمله‌ای استاندارد (متعارف)	۱۱۷
چندجمله‌ای متحد با صفر (قضیه)	۱۱۷
چندجمله‌ای‌های متحد	۱۱۸
اعمال بر چندجمله‌ای‌ها	۱۱۹
جمع چندجمله‌ای‌ها	۱۱۹
خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) ضرب نسبت به جمع (تفریق)	۱۱۹
ضرب یک عدد در یک چندجمله‌ای	۱۱۹
قرینه‌ی یک چندجمله‌ای	۱۲۰
تفریق چندجمله‌ای‌ها	۱۲۰
ضرب چندجمله‌ای‌ها	۱۲۱
تمرین‌های فصل چهارم	۱۲۳

فصل پنجم

اتحادها	۱۲۹
اتحادهای مهم جبری	۱۳۰
اتحاد اولر	۱۳۸
نکاتی درباره‌ی بسط دوجمله‌ای نیوتن	۱۴۳
جدول خیام (پاسکال)	۱۴۴
تمرین‌های فصل پنجم	۱۴۶

فصل ششم

تجزیه‌ی عبارات جبری	۱۵۷
---------------------------	-----

روش‌های گوناگون تجزیه	۱۵۷
تجزیه به کمک فاکتورگیری	۱۵۷
روش دسته‌بندی و فاکتورگیری	۱۵۸
تجزیه به کمک اتحاد اول و دوم	۱۵۸
تجزیه به کمک اتحاد مزدوج	۱۵۹
تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک	۱۵۹
تجزیه به کمک اتحادهای تفاضل مکعبات و مجموع مکعبات دو جمله	۱۶۰
تجزیه با افزودن و کاستن	۱۶۰
تجزیه‌های ترکیبی	۱۶۱
تجزیه به کمک اتحاد اولر و نتایج آن	۱۶۲
تجزیه به کمک شکستن برخی از جملات	۱۶۵
تمرین‌های فصل ششم	۱۶۷

فصل هفتم

عبارات گویا	۱۷۳
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها	۱۷۳
عبارات گویا	۱۷۴
ساده کردن عبارات گویا	۱۷۴
ضرب و تقسیم عبارات گویا	۱۷۵
تعیین مخرج مشترک چند عبارت گویا	۱۷۶
جمع و تفریق عبارات گویا	۱۷۶
تجزیه‌ی یک کسر به مجموع کسرهای ساده	۱۷۸
تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای	۱۸۳
تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای	۱۸۴
طریقه‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک دوجمله‌ای درجه‌ی اول	۱۸۸

باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x - \alpha)(x - \beta)$	۱۹۱
پیدا کردن خارج قسمت یک تقسیم به روش ضریب‌های نامعین	۱۹۳
تمرین‌های فصل هفتم	۱۹۴

فصل هشتم

رادیکال	۲۰۳
ریشه‌ی طبیعی یک عدد	۲۰۳
قدرمطلق	۲۰۳
قواعد محاسبه با رادیکال‌ها	۲۰۴
رادیکال‌های متشابه	۲۰۹
جمع و تفریق رادیکال‌ها	۲۰۹
توان کسری	۲۱۱
گویا کردن مخرج کسرها	۲۱۵
رادیکال مرکب	۲۲۰
تمرین‌های فصل هشتم	۲۲۳

فصل نهم

معادله و دستگاه درجه‌ی اول	۲۲۹
حل مسئله به کمک معادله	۲۳۱
حل و بحث معادلات یک مجهولی درجه‌ی اول	۲۳۴
دستگاه معادلات درجه‌ی اول	۲۳۶
تمرین‌های فصل نهم	۲۴۱

فصل دهم

معادله‌ی خط	۲۴۷
-------------------	-----

محور	۲۴۷
اندازه‌ی جبری یک بردار	۲۴۸
دستگاه مختصات دکارتی	۲۵۰
فاصله‌ی دو نقطه برحسب مختصات آن‌ها	۲۵۱
مختصات وسط یک پاره خط برحسب مختصات دو سر آن	۲۵۲
رابطه‌های خطی	۲۵۴
شیب یک خط	۲۵۵
معادله‌ی خط	۲۵۶
معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد و شیب آن برابر m است ...	۲۵۷
معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد	۲۵۸
شرط توازی دو خط	۲۶۴
شرط تعامد دو خط	۲۶۸
فصل مشترک دو خط راست	۲۷۰
فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_0, y_0)$ تا خط L	۲۷۳
فاصله‌ی دو خط موازی	۲۷۷
معادله‌ی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط	۲۷۸
محاسبه مساحت مثلث به کمک مختصات رئوس آن	۲۷۹
تمرین‌های فصل دهم	۲۸۰

فصل یازدهم

مثلثات	۲۸۹
زاویه	۲۸۹
واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۲۹۰
تعریف درجه	۲۹۰
تعریف گراد	۲۹۱
تعریف رادیان	۲۹۱
تبدیل واحدهای اندازه‌گیری	۲۹۲

تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویه	۲۹۳
کاربرد حل مثلث قائم‌الزاویه در تعیین بلندی‌ها و فاصله‌ها	۳۰۰
شیب خط و تانژانت زاویه	۳۰۲
نگاهی کامل‌تر به نسبت‌های مثلثاتی	۳۰۴
اتحادهای مثلثاتی	۳۰۸
سکانت و کسکانت یک زاویه	۳۱۳
تمرین‌های فصل یازدهم	۳۱۵

فصل دوازدهم

معادله‌ی درجه‌ی دوم	۳۲۵
حل معادله درجه‌ی دوم ناقص	۳۲۵
روش‌های مختلف حل معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل	۳۲۶
به کمک تجزیه	۳۲۶
به کمک مربع کامل سازی	۳۲۷
دستور کلی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم	۳۲۸
مبین معادله‌ی درجه‌ی دوم	۳۲۸
ساده کردن دستورها (دستور b')	۳۳۰
روش هندسی	۳۳۱
تجزیه‌ی سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم	۳۳۷
معادله‌ی دوم‌جذوری	۳۳۹
محاسبه‌ی عباراتی که برحسب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم متقارن هستند	۳۴۲
بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم	۳۴۴
تعیین دو عدد که مجموع و حاصل‌ضربشان معلوم است	۳۴۸
تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن دو عدد معلوم باشند	۳۴۸
معادله‌های معکوسه	۳۵۲
ریشه‌های گویای معادلات جبری	۳۵۶
تمرین‌های فصل دوازدهم	۳۵۹

فصل سیزدهم

نامساوی‌ها و نامعادلات	۳۶۹
اصول نامساوی‌ها	۳۶۹
تعریف رابطه‌ی کوچک‌تری « < »	۳۷۰
بازه (فاصله)	۳۷۵
نامساوی میانگین حسابی و هندسی	۳۷۸
دستگاه نامعادلات (نامعادلات توأم)	۳۸۴
تمرین‌های فصل سیزدهم	۳۸۸

فصل اول

مجموعه‌ی اعداد

اعداد طبیعی: عددهای ۱، ۲، ۳ و ... را که برای شمارش به کار می‌روند اعداد طبیعی می‌نامند. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با \mathbb{N} نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

اعداد حسابی: اگر عدد صفر را به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کنیم، مجموعه‌ی اعداد حسابی پدید می‌آید. مجموعه‌ی اعداد حسابی را با W نشان می‌دهیم.

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

نکته: اعداد طبیعی زوج را با E و اعداد طبیعی فرد را با O نمایش می‌دهیم

$$E = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$O = \{1, 3, 5, \dots\} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

تعریف: یک مجموعه را نسبت به یک عمل بسته گوییم در صورتی که هر دو عضوی از آن مجموعه را اختیار کرده و آن عمل را روی دو عضو انجام دهیم، حاصل عمل در آن مجموعه باشد.

نکته: مجموع دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است (\mathbb{N} نسبت به جمع بسته است).

نکته: حاصل ضرب دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است. (\mathbb{N} نسبت به ضرب بسته

است)

❖ **نکته:** اختلاف دو عدد طبیعی ممکن است عددی طبیعی نباشد. (\mathbb{N} نسبت به تفریق بسته نیست).

❖ **نکته:** حاصل تقسیم دو عدد طبیعی ممکن است عددی طبیعی نباشد. (\mathbb{N} نسبت به تقسیم بسته نیست).

خواص جمع و ضرب اعداد طبیعی

(۱) خاصیت جابه‌جایی:

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

(۲) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

(۳) عضو خنثی:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

(۴) خاصیت پخش‌ی ضرب نسبت به جمع:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

مثال ۱: آیا تفریق اعداد طبیعی دارای خاصیت شرکت‌پذیری هست یا خیر؟ تقسیم چه‌طور؟
✎ **حل:**

تفریق و تقسیم در مجموعه‌ی اعداد طبیعی خاصیت شرکت‌پذیری ندارند. مثلاً:

$$\left. \begin{aligned} (9-7)-4 &= 2-4 = -2 \\ 9-(7-4) &= 9-3 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (9-7)-4 \neq 9-(7-4)$$

$$\left. \begin{aligned} (48 \div 6) \div 2 &= 8 \div 2 = 4 \\ 48 \div (6 \div 2) &= 48 \div 3 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (48 \div 6) \div 2 \neq 48 \div (6 \div 2)$$

مثال ۲ : ثابت کنید مجموع دو عدد طبیعی زوج، عددی زوج است.

 **حل:**

فرض می‌کنیم x و y دو عدد طبیعی زوج باشند:

$$x = 2m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$y = 2n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$x + y = 2m + 2n = 2(m + n) = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

مثال ۳ : ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی زوج عددی زوج است.

 **حل:**


فرض می‌کنیم $x = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) و $y = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$x \times y = 2m \times 2n = 2 \times (2mn) = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$


☆ مجموعه‌ی اعداد صحیح

مجموعه‌ی اعداد صحیح از مجموعه‌ی اعداد طبیعی و صفر و اعداد صحیح منفی تشکیل شده که آن را با \mathbb{Z} نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

 **نکته:** مجموع و حاصل ضرب و تفاضل هر دو عدد صحیح عددی صحیح است. اما حاصل

تقسیم دو عدد صحیح ممکن است عددی صحیح نباشد. بنابراین \mathbb{Z} نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته است ولی نسبت به تقسیم بسته نیست.

 **نکته:** خاصیت‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری، پخشی و هم‌چنین وجود عضو خنثی که

درباره‌ی اعداد طبیعی برشمرديم در مجموعه‌ی اعداد صحیح نیز برقرارند.

مثال ۴ : حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $(-7) \times (-2) - 13$

ب) $(-2) \times (-5) \times (-3) - 11$

ج) $(-2)^3 - 3 \times 9$

د) $(-2) \times \left[3 - 3(2 - 3)^7 \right] - 5 - 5$

هـ) $(-6) - (-2)^3 - (-5)(-4)^2 - (-3)(-3)$

حل: 

$$\text{الف)} \quad 13 - 2 \times (-7) = 13 - (-14) = 13 + 14 = 27$$

$$\text{ب)} \quad -11 - 3 \times (-5) \times (-2) = -11 - 30 = -41$$

$$\text{ج)} \quad 9 - 3 \times (-2)^3 = 9 - 3 \times (-8) = 9 - (-24) = 9 + 24 = 33$$

$$\begin{aligned} \text{د)} \quad 5 - 5 \left[3 - 3(2 - 3)^7 \right]^2 \times (-2) &= 5 - 5 \left[3 - 3 \times (-1) \right]^2 \times (-2) = 5 - 5(6)^2 \times (-2) \\ &= 5 - 5 \times 36 \times (-2) = 5 - (-360) = 365 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{هـ)} \quad (-3)(-4)^2 - (-5)(-2)^3(-6) &= (-3) \times 16 - (-5)(-8)(-6) = -48 - (-240) \\ &= -48 + 240 = 192 \end{aligned}$$

مثال ۵: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad 1 - 4 + 3 - 6 + 5 - 8 + \dots + 67 - 70$$

$$\text{ب)} \quad (10 - 12)(12 - 14)(14 - 16) \dots (28 - 30)$$

$$\text{ج)} \quad 3^5 + 3^6 + 3^7 + \dots + 3^{20}$$

$$\text{د)} \quad 20 + 25 + 30 + \dots + 100$$

حل: 

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad (1 - 4) + (3 - 6) + (5 - 8) + \dots + (67 - 70) &= \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + \dots + (-3)}_{34 \text{ بار}} \\ &= 34 \times (-3) = -102 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad (10 - 12)(12 - 14)(14 - 16) \dots (28 - 30) &= \underbrace{(-2)(-2)(-2) \dots (-2)}_{10 \text{ بار}} = (-2)^{10} = 1024 \end{aligned}$$

$$\text{ج)} \quad x = 3^5 + 3^6 + 3^7 + \dots + 3^{20}$$

$$3x = 3^6 + 3^7 + 3^8 + \dots + 3^{21}$$

$$3x - x = 3^{21} - 3^5 \Rightarrow 2x = 3^{21} - 3^5 \Rightarrow x = \frac{3^{21} - 3^5}{2}$$

$$\text{د)} \quad x = 20 + 25 + 30 + \dots + 100$$

$$x = 100 + 95 + 90 + \dots + 20$$

$$2x = 120 + 120 + 120 + \dots + 120 \Rightarrow 2x = 17 \times 120 \Rightarrow x = 1020$$

☆ مجموعه‌ی اعداد گویا

مجموعه‌ی اعداد گویا در واقع مجموعه‌ی کسرهایی مانند $\frac{a}{b}$ است که a و b اعدادی صحیح و $b \neq 0$ باشد. مجموعه‌ی اعداد گویا را با Q نشان می‌دهیم.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

اعداد $\frac{3}{7}, \frac{-1}{4}, \frac{4}{-9}, 0, 19$ و -27 اعداد گویا می‌باشند.

درباره‌ی اعداد گویا و محاسبات مربوط به آن‌ها سال‌های قبل به تفصیل مطالبی خوانده‌اید. در این جا به ذکر چند مثال اکتفا می‌کنیم.

مثال ۶: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $-\frac{7}{15} + \frac{3}{10} - \frac{9}{-20}$

ب) $\frac{-11}{24} - \frac{5}{36} - \frac{-7}{12}$

ج) $\frac{13}{24} - \frac{5}{12} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{2}$

د) $\frac{91}{130} + \frac{63}{-105} - \frac{-77}{275}$

حل: 

الف) $\frac{-7}{15} + \frac{3}{10} + \frac{9}{20} = \frac{-28 + 18 + 27}{60} = \frac{17}{60}$

ب) $\frac{-11}{24} - \frac{5}{36} + \frac{7}{12} = \frac{-33 - 10 + 42}{72} = \frac{-1}{72}$

ج) $\frac{13}{24} - \frac{5}{12} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{2} = \frac{13}{24} - \frac{7}{16} = \frac{26 - 21}{48} = \frac{5}{48}$

د) $\frac{91}{130} - \frac{63}{105} + \frac{77}{275} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5} + \frac{7}{25} = \frac{35 - 30 + 14}{50} = \frac{19}{50}$

مثال ۷: حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{70}\right)$

ب) $1\frac{1}{10} + 2\frac{2}{10} + 3\frac{3}{10} + \dots + 55\frac{55}{10}$

حل: 

$$\text{الف)} \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{70}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{69}{70} = \frac{4}{70} = \frac{2}{35}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad 1\frac{1}{10} + 2\frac{2}{10} + 3\frac{3}{10} + \dots + 55\frac{55}{10} &= (1+2+3+\dots+55) + \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{55}{10}\right) \\ &= \frac{55 \times 56}{2} + \frac{55 \times 56}{20} = 1540 + 154 = 1694 \end{aligned}$$

مثال ۸: حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{24} \\ \hline \frac{5}{24} - \frac{7}{36} - \frac{1}{48} \\ \hline \end{array}$$

حل: 

$$\begin{array}{r} \frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{24} \\ \hline \frac{5}{24} - \frac{7}{36} + \frac{1}{48} \\ \hline \end{array} = \frac{6-4-3}{72} = \frac{-1}{72} = \frac{-1 \times 144}{5 \times 72} = \frac{-2}{5}$$

$$\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

مثال ۹: اگر $a < b$ باشد، ثابت کنید:حل: 

$$\frac{b-a}{a \times b} = \frac{b}{a \times b} - \frac{a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

مثال ۱۰: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \dots + \frac{1}{39 \times 40}$$

$$\text{ب)} \frac{5}{1 \times 6} + \frac{5}{6 \times 11} + \frac{5}{11 \times 16} + \dots + \frac{5}{51 \times 56}$$

$$\text{ج)} \frac{1}{3 \times 15} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \dots + \frac{1}{19 \times 21}$$

$$\text{د)} \frac{3}{2 \times 4} + \frac{3}{4 \times 6} + \frac{3}{6 \times 8} + \dots + \frac{3}{18 \times 20}$$

حل: 

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \dots + \frac{1}{39 \times 40} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \dots \\ &+ \frac{1}{39} - \frac{1}{40} = \frac{1}{10} - \frac{1}{40} = \frac{3}{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad \frac{5}{1 \times 6} + \frac{5}{6 \times 11} + \frac{5}{11 \times 16} + \dots + \frac{5}{51 \times 56} &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &+ \left(\frac{1}{51} - \frac{1}{56}\right) = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \dots + \frac{1}{19 \times 21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{19 \times 21} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{21} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د)} \quad \frac{3}{2 \times 4} + \frac{3}{4 \times 6} + \frac{3}{6 \times 8} + \dots + \frac{3}{18 \times 20} &= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{6 \times 8} + \dots + \frac{2}{18 \times 20} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{9}{20} = \frac{27}{40} \end{aligned}$$

مثال ۱۱: کسری مساوی $\frac{65}{19}$ پیدا کنید که مجموع صورت و مخرج آن ۱۳۲ باشد.

حل: 

$$\frac{65}{91} = \frac{5}{7}$$

کسر مساوی $\frac{5}{7}$ را $\frac{5x}{7x}$ در نظر می‌گیریم.

$$5x + 7x = 132 \rightarrow 12x = 132 \rightarrow x = 11$$

$$\frac{5x}{7x} = \frac{5 \times 11}{7 \times 11} = \frac{55}{77}$$

مثال ۱۲: سه کسر بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{18}$ پیدا کنید.

حل: 

$$\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$$

$$\frac{5}{18} < x < \frac{6}{18} \Rightarrow \frac{20}{72} < x < \frac{24}{72}$$

$$\frac{20}{72} < \frac{21}{72} < \frac{22}{72} < \frac{23}{72} < \frac{24}{72}$$

مثال ۱۳: بین کسرهای $\frac{5}{12}$ و $\frac{7}{16}$ دو کسر نام ببرید که مخرج آن‌ها ۱۰۰ باشد.

حل: 

کوچک‌ترین عددی که بر ۱۲ و ۱۶ و ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، عدد ۱۲۰۰ است.

$$\frac{7}{16} = \frac{525}{1200}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{500}{1200}$$

بین اعداد ۵۰۰ و ۵۲۵ دو عدد ۵۰۴ و ۵۱۶ بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

$$\frac{500}{1200} < \frac{504}{1200} < \frac{516}{1200} < \frac{525}{1200}$$

$$\frac{5}{12} < \frac{42}{100} < \frac{43}{100} < \frac{7}{16}$$

مثال ۱۴: سعید $\frac{2}{7}$ پول خود را به خواهرش و نصف بقیه پول را به برادرش داد و $\frac{1}{4}$ پولش

را کتاب خرید و ۱۲۰۰ ریال برایش باقی ماند. کل پول سعید چه قدر بوده است؟

حل: 

$$\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{14} + \frac{1}{4} = \frac{25}{28}$$

$$\frac{28}{28} - \frac{25}{28} = \frac{3}{28}$$

$$1200 \div \frac{3}{28} = 1200 \times \frac{28}{3} = 11200$$

مثال ۱۵: علی کاری را در ۸ ساعت و رضا همان کار را در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند. دو نفر با هم کار را در چه مدتی انجام می‌دهند؟

حل: 

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{3+2}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{1}{\frac{5}{24}} = \frac{x}{\frac{24}{24}} \rightarrow x = \frac{1}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ ساعت}$$

نماد متعارفی و اعشاری

هر عدد گویا را به دو صورت کسر متعارفی یا عدد اعشاری نشان می‌دهند که چگونگی تبدیل آن‌ها به هم را بررسی می‌کنیم.

☆ تبدیل نماد متعارفی به نماد اعشاری

برای تبدیل یک عدد کسری به نماد اعشاری کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم و خارج قسمت را در نظر بگیریم.

از این جهت نماد اعشاری کسرها را به دو دسته‌ی تحقیقی و متناوب می‌توان تقسیم کرد.
۱- دسته‌ی اول کسرهایی هستند که به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، به باقی‌مانده‌ی صفر می‌رسیم و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. نماد اعشاری این کسرها، تحقیقی (مختوم) نامیده می‌شوند.

مثال ۱۶: نماد اعشاری کسرهای $\frac{3}{5}$ ، $\frac{7}{20}$ و $\frac{1}{8}$ تحقیقی است، زیرا:

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

$$\begin{array}{r} 70 \overline{) 20} \\ \underline{60} \\ 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array} \quad \frac{7}{20} = 0.35$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 8} \\ 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

۲۰

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline \end{array}$$

۴۰

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline \end{array}$$

۰

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

کسرهای تحویل ناپذیر $\frac{3}{5}$ ، $\frac{7}{20}$ و $\frac{1}{8}$ که در مثال فوق مطرح شدند مخرج‌هایشان فقط از عامل‌های اول ۲ یا ۵ تشکیل شده‌اند.

نکته: به‌طور کلی کسرهای تحویل ناپذیری که در تجزیه‌ی مخرجشان فقط عامل ۲ یا ۵ ظاهر شوند دارای نماد اعشاری تحقیقی می‌باشند. زیرا اگر در تجزیه‌ی مخرج کسری مثلاً با عبارت $2^m \times 5^n$ که در آن $m > n$ مواجه شدیم می‌توانیم صورت و مخرج کسر را در 5^{m-n} ضرب کرده و نماها را مساوی کنیم و به این ترتیب در مخرج توانی از ۱۰ می‌سازیم که چنین کسرهایی را می‌توان به‌صورت نماد اعشاری تحقیقی نوشت.

مثال ۱۷: معین کنید نماد اعشاری کدام‌یک از کسرهای زیر تحقیقی است؟

$$\frac{31}{40} \text{ و } \frac{21}{600} \text{ و } \frac{11}{140} \text{ و } \frac{5}{9}$$

حل: 

کسر $\frac{31}{40}$ تحویل ناپذیر و مخرج آن $40 = 2^3 \times 5$ فقط از عامل‌های ۲ یا ۵ تشکیل شده. لذا تحقیقی است.

کسر $\frac{21}{600}$ برابر کسر $\frac{7}{200}$ است که مخرج آن $200 = 2^3 \times 5^2$ فقط از عامل‌های ۲ یا ۵ تشکیل شده. لذا تحقیقی است.

کسر $\frac{۱۱}{۱۴۰}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۱۴۰ = ۲^2 \times ۵ \times ۷$ علاوه بر عامل‌های ۲ و ۵ شامل عامل ۷ نیز می‌باشد. بنابراین تحقیقی نیست.

کسر $\frac{۵}{۹}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۹ = ۳^2$ عامل ۲ یا ۵ ندارد، لذا تحقیقی نیست.

۲- دسته‌ی دوم کسرهایی هستند که وقتی صورتشان را بر مخرجشان تقسیم می‌کنیم هیچ‌گاه به باقی‌مانده صفر نمی‌رسیم و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به‌طور متناوب تکرار می‌شود که این ارقام تکراری را **دوره‌ی گردش** می‌نامند. نماد اعشاری این کسرها را متناوب می‌نامند. این دسته از کسرها خود به دو دسته تقسیم می‌شوند. در برخی از آن‌ها هنگام تبدیل به نماد اعشاری بلافاصله بعد از ممیز دوره‌ی گردش آغاز می‌شود که نماد اعشاری آن‌ها را **متناوب ساده** می‌نامیم. برخی دیگر نیز به هنگام تقسیم صورت به مخرج بلافاصله بعد از ممیز دوره‌ی گردش آغاز نمی‌شود بلکه یک یا چند رقم می‌آیند سپس دوره‌ی گردش آغاز می‌گردد. نماد اعشاری این کسرها را **متناوب مرکب** می‌نامند. ارقامی که بعد از ممیز می‌آیند ولی تکرار نمی‌شوند **دوره‌ی غیرگردش** نامیده می‌شوند.

مثال ۱۸: معین کنید نماد اعشاری کدام‌یک از کسره‌ای زیر متناوب ساده و کدام‌یک متناوب مرکب می‌باشند.

$$\frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{۱۶}{۴۵} \text{ و } \frac{۴}{۳۳} \text{ و } \frac{۷}{۶}$$

حل: 

$\begin{array}{r} ۲۰ \overline{) ۱۸} \\ ۱۸ \\ \hline ۰ \end{array}$ $\frac{۲}{۳} = ۰.\overline{۶}$	$\begin{array}{r} ۱۶۰ \overline{) ۴۵} \\ ۱۳۵ \\ \hline ۲۵۰ \\ ۲۲۵ \\ \hline ۲۵۰ \\ ۲۲۵ \\ \hline ۲۵ \end{array}$ $\frac{۱۶}{۴۵} = ۰.\overline{۳۵}$
--	--

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 33} \\ 33 \overline{) 0/1212...} \\ 70 \\ 66 \end{array}$$

$$40 \quad \frac{4}{33} = 0.\overline{12}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 70 \\ 66 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 6} \\ 6 \overline{) 1/166...} \\ 10 \\ 6 \end{array}$$

$$40 \quad \frac{7}{6} = 1.\overline{16}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 40 \\ 36 \\ 4 \end{array}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود نماد اعشاری کسرهای $\frac{4}{33}$ و $\frac{2}{3}$ متناوب ساده و نماد اعشاری کسرهای $\frac{7}{6}$ و $\frac{16}{45}$ متناوب مرکب می‌باشند.

نکته: برای تشخیص این‌که نماد اعشاری یک کسر متناوب ساده یا مرکب است به این ترتیب عمل می‌کنیم که ابتدا کسر را ساده می‌کنیم تا به یک کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل شود. سپس مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. اگر در تجزیه‌ی مخرج عامل ۲ یا ۵ وجود نداشته باشد و حداقل یکی از اعداد اول دیگر ظاهر شود، نماد اعشاری کسر، متناوب ساده و اگر در تجزیه‌ی مخرج عامل‌های ۲ یا ۵ و حداقل یک عامل اول و غیر از ۲ یا ۵ وجود داشته باشد نماد اعشاری کسر، متناوب مرکب است.

مثال ۱۹: معین کنید نماد اعشاری کسرهای زیر تحقیقی، متناوب ساده یا مرکب است؟

$$\frac{4}{18} \text{ و } \frac{21}{45} \text{ و } \frac{33}{60}$$

حل:

کسر $\frac{4}{18}$ برابر $\frac{2}{9}$ که مخرج آن یعنی $3^2 = 9$ فقط عامل ۳ دارد. لذا نماد اعشاری کسر $\frac{4}{18}$ متناوب ساده است.

کسر $\frac{21}{45}$ برابر $\frac{7}{15}$ و مخرج آن $3 \times 5 = 15$ علاوه بر عامل ۵ عامل دیگری نیز دارد. لذا نماد اعشاری کسر متناوب مرکب است.

کسر $\frac{33}{60}$ برابر $\frac{11}{20}$ و مخرج آن $2^2 \times 5 = 20$ فقط از عامل‌های ۲ یا ۵ تشکیل شده بنابراین نماد اعشاری کسر تحقیقی است.

مثال ۲۰: کسر $\frac{4997}{9000}$ را به صورت اعشاری تبدیل کرده بگویید نماد اعشاری متناوب ساده است یا مرکب.

حل: 

$$\begin{array}{r} 49970 \\ \hline 9000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45000 \\ \hline 0/55522... \end{array}$$

$$49700$$

$$\begin{array}{r} 45000 \\ \hline 49700 \end{array} \quad \frac{4997}{9000} = 0/555\bar{2} \quad \text{متناوب مرکب}$$

$$47000$$

$$45000$$

$$20000$$

$$18000$$

$$2000$$

مثال ۲۱: در کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{7n}{45}$ عدد طبیعی n را چنان تعیین کنید که نماد

اعشاری کسر متناوب ساده شود.

حل: 

با توجه به این‌که مخرج عامل ۵ دارد عدد n را می‌توان برابر ۵ در نظر گرفت تا کسر

$$\text{به صورت } \frac{7 \times 5}{45} = \frac{7}{9}$$

تبدیل شود که متناوب ساده است.

مثال ۲۲ : از دو عدد $۰/۵$ و $۰/۵۵۵$ کدام بزرگ‌تر است؟ چرا؟

حل: 

رقم مرتبه‌ی یک ده‌هزارم‌های عدد $۰/۵$ برابر ۵ و رقم یک ده‌هزارم‌های عدد $۰/۵۵۵$ صفر است. لذا:

$$۰/۵ > ۰/۵۵۵$$

مثال ۲۳ : از دو عدد $۰/۵$ و $۰/۶$ کدام بزرگ‌تر است؟

حل: 

رقم مرتبه‌ی یک دهم‌های عدد $۰/۵$ برابر ۵ و رقم یک دهم‌های عدد $۰/۶$ برابر ۶ است. لذا:

$$۰/۶ > ۰/۵$$

☆ تبدیل نماد اعشاری به نماد متعارفی

۱- تبدیل نماد اعشاری تحقیقی به متعارفی:

مثال ۲۴ :

$$۰/۷ = \frac{۷}{۱۰}$$

$$۰/۲۵ = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴}$$

$$۰/۰۱۳ = \frac{۱۳}{۱۰۰۰}$$

$$۲/۰۰۱ = ۲ \frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{۲۰۰۱}{۱۰۰۰}$$

۲- تبدیل نماد اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی:

برای تبدیل نماد اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی، عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده و طرفین تساوی حاصل را با توجه به این که دوره‌ی گردش یک رقمی، دو رقمی، سه رقمی باشد به ترتیب در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم. سپس طرفین دو معادله‌ی حاصل را از هم کم می‌کنیم تا معادله‌ی جدیدی فاقد اعداد متناوب ساخته شود جواب این معادله کسر مولد آن عدد اعشاری است.

مثال ۲۵ : کسر مولد عدد $۰/۱۵$ را به دست آورید.

حل: 

$$x = ۰/۱۵$$

$$۱۰۰x = ۱۵/۱۵$$

$$۱۰۰x - x = ۱۵/۱۵ - ۰/۱۵$$

$$۹۹x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۹۹} = \frac{۵}{۳۳}$$

مثال ۲۶: کسر مولد عدد $5/\overline{005}$ را به دست آورید.

 حل:

$$x = 5/\overline{005}$$

$$\underline{1000x = 5005/\overline{005}}$$

$$1000x - x = 5005/\overline{005} - 5/\overline{005}$$

$$999x = 5000 \Rightarrow x = \frac{5000}{999}$$

مثال ۲۷: نشان دهید $7/\overline{9} = 8$.

 حل:

$$x = 7/\overline{9}$$

$$\underline{10x = 79/\overline{9}}$$

$$10x - x = 79/\overline{9} - 7/\overline{9}$$

$$9x = 72 \Rightarrow x = \frac{72}{9} = 8$$

۳- تبدیل نماد اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی:

برای تبدیل نماد اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی ابتدا عدد را مساوی x قرار داده، سپس با در نظر گرفتن ارقامی که بعد از ممیز آمده ولی تکرار نمی‌شوند (دوره‌ی غیرگردش)، دو طرف معادله را در اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... ضرب می‌کنیم تا عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد اعشاری متناوب ساده تبدیل شود. سپس مانند تبدیل اعداد اعشاری متناوب ساده به نماد متعارفی عمل می‌کنیم.

مثال ۲۸: نماد متعارفی عدد $0/\overline{524}$ را به دست آورید.

حل: 

$$x = 0.\overline{524}$$

$$100x = 52.\overline{4}$$

$$1000x = 524.\overline{4}$$

$$1000x - 100x = 524.\overline{4} - 52.\overline{4}$$

$$900x = 472 \rightarrow x = \frac{472}{900} = \frac{118}{225}$$

مثال ۲۹: کسر مولد عدد $2/0.\overline{29}$ را پیدا کنید.

حل: 

$$x = 2/0.\overline{29}$$

$$10x = 20/\overline{29}$$

$$1000x = 2029/\overline{29}$$

$$1000x - 10x = 2029/\overline{29} - 20/\overline{29}$$

$$990x = 2009 \Rightarrow x = \frac{2009}{990}$$

☆ راه حل تستی برای تبدیل نماد اعشاری به کسر متعارفی

اگر نماد اعشاری، متناوب ساده باشد، ارقام دوره‌ی گردش را در صورت کسر نوشته و در مخرج به تعداد ارقام دوره‌ی گردش ۹ می‌گذاریم.

مثال ۳۰:

$$0.\overline{13} = \frac{13}{99}$$

$$0.\overline{005} = \frac{5}{999}$$

$$2/\overline{4} = 2\frac{4}{9} = \frac{22}{9}$$

$$4/\overline{9} = 4\frac{9}{9} = 5$$

اگر نماد اعشاری، متناوب مرکب باشد، به این ترتیب عمل می‌کنیم که در صورت تمام ارقام بعد از ممیز را منهای ارقام غیرگردش می‌کنیم و در مخرج به تعداد ارقام دوره‌ی گردش ۹ و به تعداد ارقام غیرگردش صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۳۱ :

$$0.\overline{25} = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90}$$

$$0.\overline{153} = \frac{153-15}{900} = \frac{138}{900}$$

$$7.\overline{123} = 7 \frac{123-1}{990} = 7 \frac{122}{990} = \frac{7052}{990}$$

$$0.\overline{0005} = \frac{5-0}{9000} = \frac{5}{9000} = \frac{1}{1800}$$

مثال ۳۲ : اگر $0.\overline{5a} = \frac{b}{11}$ اعداد طبیعی a و b را به دست آورید.

حل: 

$$0.\overline{5a} = \frac{5a}{99} = \frac{b}{11} \Rightarrow \overline{5a} \times 11 = 99b \Rightarrow \overline{5a} = 9b$$

تنها مضرب دو رقمی ۹ که رقم دهگان ۵ باشد، $54 = 6 \times 9$ است. لذا:

$$b = 6 \text{ و } a = 4$$

مثال ۳۳ : رقم هفتم نماد اعشاری عدد $\frac{1}{7}$ چیست؟

حل: 

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

$$70 = 6 \times 11 + 4$$

با توجه به این که دوره‌ی گردش شش رقمی است، خواهیم داشت:

چهارمین رقم دوره‌ی تناوب ۸ است. بنابراین هفتمین رقم نیز ۸ است.

اعداد اعشاری $0.\overline{12345}$ و $0.\overline{101001000}$ را در نظر بگیرید. علی‌رغم این که این اعداد

حالتی موزون دارند اما نمی‌توان کسری مانند $\frac{a}{b}$ به هریک از آن‌ها نظیر کرد. از این نوع اعداد

به وفور یافت می‌شود و چون نمی‌توان نماد متعارفی آن‌ها را تعیین کرد آن‌ها را گنگ یا اصم

می‌نامند. مجموعه‌ی اعداد گنگ را با Q' نشان می‌دهیم.

به‌طور کلی اگر عددی اعشاری یافت شود که تعداد ارقام اعشاری آن نامتناهی بوده و نتوان

به‌صورت عددی گویا نشان داد آن را یک عدد اصم نامند. در اثبات گنگ بودن یک عدد حقیقی

معمولاً از روش برهان خلف استفاده می‌شود.

به این صورت که فرض می‌کنند عدد موردنظر گویا باشد (فرض خلف) و از آن‌جا به یک تناقض

می‌رسند.

مثال ۳۴ : ثابت کنید $\sqrt{2}$ اصم است.

حل:

فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد. (فرض خلف) و $\frac{a}{b}$ صورت تحویل ناپذیر $\sqrt{2}$ باشد. یعنی $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $(a, b) = 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

سمت راست تساوی اخیر عددی زوج است. پس سمت چپ نیز باید زوج باشد. چون a عدد صحیح است برای زوج بودن a^2 لازم است که a نیز زوج باشد. لذا عددی صحیح مانند k یافت می شود که $a = 2k$.

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$$

با استدلال مشابه به این نتیجه می رسیم که b نیز زوج است و این با $(a, b) = 1$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت. یعنی $\sqrt{2}$ اصم است.

مثال ۳۵ : ثابت کنید جمع هر عدد گویا و هر عدد اصم عددی اصم است.

حل:

فرض کنیم $a \in Q$ و $b \in Q'$ ولی $a + b \in Q$. (فرض خلف) پس عضوی از Q مانند c یافت می شود که $a + b = c$ و از آن جا $b = c - a$, طرف دوم تساوی اخیر عددی گویا و طرف اول آن عددی اصم است. این یک تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم ثابت.

قضیه: ثابت کنید حاصل ضرب هر عدد گنگ در هر عدد گویای غیر صفر عددی گنگ است.

اثبات: فرض می کنیم $a \in Q$ و $a \neq 0$ و $b \in Q'$. هم چنین فرض می کنیم $ab = c$ و $c \in Q$ (فرض خلف) و از آن جا خواهیم داشت $b = \frac{c}{a} = c \times \frac{1}{a}$. با توجه به این که a عددی گویا و مخالف صفر است، می توان گفت $\frac{1}{a}$ نیز گویاست. لذا $c \times \frac{1}{a}$ نیز گویاست. پس b نیز گویاست که تناقض است. بنابراین فرض $c \in Q$ باطل و حکم ثابت است.

قضیه: ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ عددی گنگ است.

اثبات: فرض می‌کنیم a عددی گنگ است و نشان می‌دهیم $\frac{1}{a}$ نیز گنگ است. فرض می‌کنیم $\frac{1}{a}$ گویا باشد. در این صورت باید a عددی گویا و مخالف صفر باشد که با فرض قضیه تناقض دارد. پس $\frac{1}{a}$ گنگ است.

مثال ۳۶: ثابت کنید قرینه‌ی هر عدد اصم عددی اصم است.

حل:

فرض کنیم $a \in Q'$ ولی $-a \in Q$ (فرض خلف). پس عضوی از Q مانند b هست که $-a = b$ و از آن‌جا $a = -b$. این نشان می‌دهد که a گویاست که با فرض اصم بودن a تناقض دارد.

مثال ۳۷: نشان دهید Q' نسبت به هیچ‌یک از چهار عمل اصلی بسته نیست.

حل:

با اختیار $\sqrt{2} \in Q'$ داریم:

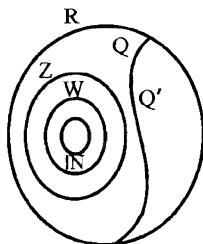
Q' نسبت به جمع بسته نیست. $\Rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q'$ و $-\sqrt{2} \in Q'$ (الف)

Q' نسبت به تفریق بسته نیست. $\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin Q'$ (ب)

Q' نسبت به ضرب بسته نیست. $\Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \notin Q'$ (ج)

Q' نسبت به تقسیم بسته نیست. $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \notin Q'$ (د)

☆ مجموعه‌ی اعداد حقیقی



مجموعه‌ی متشکل از اعداد گویا و گنگ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامیده و آن‌را با \mathbb{R} نشان می‌دهیم. به‌طور کلی می‌توان گفت هر عدد حقیقی یا گویاست یا گنگ. هم‌چنین مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ هیچ عضو مشترکی ندارند.

اصول موضوعی اعداد حقیقی

به ازای هر a و b و c از مجموعه‌ی اعداد حقیقی ویژگی‌های زیر درست می‌باشند.

(۱) خاصیت جابه‌جایی برای جمع و ضرب

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

(۲) خاصیت شرکت‌پذیری برای جمع و ضرب

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

(۳) وجود عضو خنثی برای جمع و ضرب

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

(۴) وجود عضو متقابل برای جمع و ضرب

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad \text{قرینه}$$

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1 \quad \text{معکوس}$$

(۵) خاصیت پخش‌ی ضرب نسبت به جمع

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

🔹 **نکته:** به دو طرف یک تساوی می‌توان یک مقدار معین اضافه کرد. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

🔹 **نکته:** از دو طرف یک تساوی می‌توان یک مقدار معین کم کرد. $a = b \Rightarrow a - c = b - c$

🔹 **نکته:** دو طرف یک تساوی را می‌توان در یک عدد ضرب کرد. $a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$

🔹 **نکته:** دو طرف یک تساوی را می‌توان بر یک عدد غیرصفر تقسیم کرد.

$$a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

🔹 **نکته:** قرینه‌ی قرینه‌ی یک عدد با خود عدد مساوی است. $-(-a) = a$

🔹 **نکته:** وارون وارون یک عدد با خود عدد مساوی است. $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

تمرین‌های فصل اول

۱. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $۱۷ - ۴ \times ۳^۲ - ۷ - ۵(۳ - ۴)^۷ \times (-۲)$

ب) $(-۳)(-۵)^۲ - (-۲)(-۴)^۲(-۶)$

ج) $۹ - ۹[۵ - ۵(۴ - ۵)^۷ \times (-۲)] \times (-۳)$

د) $۹ - ۳(۸ - ۴(۵ - ۹(۲ - ۵))) \times (-۶)$

هـ) $۱۱ - ۱۴ + ۱۷ - ۲۰ + ۲۳ - ۲۶ + \dots + ۱۲۵ - ۱۲۸$

و) $(۲ - ۶)(۳ - ۷)(۴ - ۸) \dots (۹۱ - ۹۵)$

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + \dots + ۷۵$

ب) $(-۳۰) + (-۲۵) + (-۲۰) + \dots + ۷۰$

ج) $(۷ \times ۱ + ۳) + (۷ \times ۲ + ۳) + (۷ \times ۳ + ۳) + \dots + (۷ \times ۵۰ + ۳)$

د) $۲^{۱۵} + ۲^{۱۶} + ۲^{۱۷} + \dots + ۲^{۳۰}$

هـ) $۳ + ۳^۲ + ۳^۳ + \dots + ۳^{۲۰}$

و) $۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + \dots + \frac{1}{۱۲۸}$

۳. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۷}{۳۶} - \frac{۵}{۲۴} - \frac{۱}{۷۲}$

ب) $\frac{۱۳}{۳۴} - \frac{-۷}{۵۱} - \frac{۵}{۱۷}$

ج) $\frac{۱۳}{۲۸} - \frac{۲۱}{۵۸} \times \frac{-۲۹}{۳۵}$

د) $\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۸} \left(\frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} \right) \right)$

$$\text{هـ)} \quad 7\frac{1}{7} + 7\frac{2}{7} + 7\frac{3}{7} + \dots + 7\frac{20}{7}$$

$$\text{و)} \quad \left(1 + \frac{1}{10}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \left(1 + \frac{1}{12}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{50}\right)$$

۴. ثابت کنید مجموع دو عدد صحیح فرد عددی فرد است.

۵. ثابت کنید مجذور یک عدد فرد عددی فرد است و بالعکس.

۶. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad \frac{2}{7 \times 9} + \frac{2}{9 \times 11} + \frac{2}{11 \times 13} + \dots + \frac{2}{33 \times 35}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \dots + \frac{1}{61 \times 64}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{3}{11 \times 16} + \frac{3}{16 \times 21} + \frac{3}{21 \times 26} + \dots + \frac{3}{46 \times 51}$$

$$\text{د)} \quad \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{399}$$

۷. حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+40}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \frac{3}{50} + \dots + \frac{49}{50}\right)$$

۸. اگر $a_1 = 1$ و $a_2 = 1+2$ و $a_3 = 1+2+3$ و $a_4 = 1+2+3+\dots+20$ باشد، حاصل

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_4$ را به دست آورید.

۹. حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{29}{30!}$$

۱۰. حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{1 + \frac{5}{1 + 5}}}$$

۱۱. اعداد زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید:

$$A = 2005 + \frac{1}{2005}$$

$$B = 2005 + \frac{1}{2005 + \frac{1}{2005}}$$

$$C = 2005 + \frac{1}{2005 + \frac{1}{2005 + \frac{1}{2005}}}$$

۱۲. ثابت کنید:

$$\frac{1}{81} + \frac{1}{82} + \frac{1}{83} + \dots + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$$

۱۳. ثابت کنید:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{90}{91} \right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{91}{90} \right) > 90$$

۱۴. ثابت کنید:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$$

۱۵. کسری مساوی $\frac{35}{77}$ پیدا کنید که تفاضل صورت و مخرج آن ۱۷۴ باشد.

۱۶. کوچک‌ترین عدد طبیعی که اگر آن را بر $\frac{9}{10}$ و $\frac{12}{25}$ و $\frac{18}{35}$ تقسیم کنیم، خارج قسمت‌ها

اعدادی طبیعی باشند، چیست؟

۱۷. نادر $\frac{2}{7}$ پول خود را کتاب، $\frac{1}{5}$ بقیه‌ی پول را دفتر خرید. سپس نصف باقی‌مانده‌ی پولش را

به خواهرش داد و ۱۴۰۰۰ ریال برایش باقی ماند. کل پول نادر چه قدر است؟

۱۸. فواره‌ی A حوضی را در ۸ ساعت، فواره‌ی B حوض را در ۴ ساعت پر می‌کنند. اگر سه فواره‌ی A، B و C با هم حوض را در ۲ ساعت پر کنند، معین کنید فواره‌ی C به تنهایی در چند ساعت حوض را پر می‌کند؟

۱۹. نماد اعشاری کسرهای $\frac{5}{8}$ ، $\frac{7}{3}$ و $\frac{8}{15}$ را نوشته و معین کنید نماد اعشاری عدد از چه نوعی است؟

۲۰. اعداد زیر را به صورت نماد متعارفی بنویسید.

الف) $0/0007$

ب) $2/174$

ج) $2/174$

د) $99/9$

هـ) $1/357$

و) $0/0009$

۲۱. دهمین رقم نماد اعشاری $\frac{2501}{22500}$ چیست؟

۲۲. در کسر $1 < \frac{4a}{55} < 2$ مقادیر $a \in N$ را چنان تعیین کنید که کسر حاصل مولد:

(الف) یک عدد اعشاری تحقیقی باشد.

(ب) یک عدد اعشاری متناوب ساده باشد.

(ج) یک عدد اعشاری متناوب مرکب باشد.

۲۳. چند عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت، به طوری که به ازای آن‌ها کسر کوچک‌تر از

واحد $\frac{a}{315}$ مولد یک عدد اعشاری متناوب ساده باشد؟

۲۴. چند عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت به طوری که به ازای آن‌ها کسر کوچک‌تر از

واحد $\frac{a}{105}$ مولد یک عدد اعشاری متناوب مرکب باشد.

۲۵. هر دسته از اعداد زیر را با هم مقایسه کنید:

(الف) $0.\overline{۵}$ و $0.\overline{۲۵}$

(ب) $0.\overline{۲۵}$ و $0.\overline{۲۵}$

۲۶. اگر $\frac{b}{۱۱} = 0.\overline{۶a}$ ، a و b را حساب کنید.

۲۷. n عدد گویا بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ ارائه دهید.

۲۸. اگر $\frac{a}{b} = 0.\overline{۳۶}$ و $(a, b) = ۱$ ، حاصل $a + b$ چه قدر است؟

۲۹. چهل و هفتمین رقم نماد اعشاری $\frac{۴۱}{۳۳۳}$ چیست؟

۳۰. کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+۱}{b+۱}$ را با هم مقایسه کنید.

۳۱. عدد طبیعی a را چنان تعیین کنید که $0.\overline{۵۸۳}$ با کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{۳a+۴}{۵a+۷}$ برابر باشد.

۳۲. کسر متعارفی $۱ < \frac{b(b+۱)}{b^2+۷}$ ($b \in N$) را در نظر بگیرید.

اولاً: همه‌ی مقادیر ممکن b را مشخص کنید.

ثانیاً: به ازای هر مقدار b نوع عدد اعشاری را که از کسر فوق تولید می‌شود، مشخص کنید.

۳۳. کسر $\frac{r}{۴۸}$ تحویل‌ناپذیر است. $\frac{r}{۴۸}$ مولد چه نوع عدد اعشاری می‌باشد؟

۳۴. اگر کسر $۱ < \frac{n}{۷۲}$ ($n \in N$) مولد عدد اعشاری متناوب ساده باشد، مقادیر n را به دست آورید.

۳۵. اگر $\frac{۵۲}{۱۱} = ۴.\overline{a۲}$ باشد، a را تعیین کنید.

۳۶. اگر $a \in N$ ، مقادیر a را چنان تعیین کنید که کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{a}{\sqrt{0}}$:

اولاً: مولد نماد اعشاری تحقیقی باشد.

ثانیاً: مولد نماد اعشاری متناوب ساده باشد.

ثالثاً: مولد نماد اعشاری متناوب مرکب باشد.

۳۷. ثابت کنید:

$$N / a_1 a_2 \dots a_k = N / a_1 a_2 \dots (a_k - 1) \bar{9}$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۸. نماد متعارفی دو عدد $0/\bar{61}$ و $0/\bar{6}$ را بنویسید و بین آن‌ها سه عدد گویا به دست آورید.

۳۹. کسر متعارفی مولد عدد اعشاری $A = 2/\bar{3} \times 0/\bar{23}$ را بنویسید.

۴۰. کسر متعارفی مولد عدد اعشاری عدد $A = 0/\bar{153} + 0/\bar{153}$ را بنویسید.

۴۱. مطلوبست تمام کسرهایی که صورتشان از ۲۰۰ کوچک‌تر و مخرجشان از ۳۰۰ بزرگ‌تر

بوده و مساوی $\frac{57}{133}$ باشند.

۴۲. اعداد $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{10}$ و $\sqrt{3}+1$ و $\sqrt{10}-1$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

۴۳. ثابت کنید $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

۴۴. ثابت کنید $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عددی گنگ است. (فقط از فرض $\sqrt{2}$ گنگ است استفاده کنید).

👉 فصل دوم

مجموعه

دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص را مجموعه گویند. مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی A ، B و C و ... نام‌گذاری می‌کنند. اعداد طبیعی کوچک‌تر از صد، اعداد صحیح بزرگ‌تر از -10 ، مضارب صحیح عدد ۳ مثال‌هایی از مجموعه هستند.

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$$

$$B = \{-9, -8, -7, \dots\}$$

$$C = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

عناصری که یک مجموعه را تشکیل می‌دهند اعضای مجموعه نامیده می‌شوند. اگر a عضوی از مجموعه‌ی A باشد آن‌را به‌صورت $a \in A$ و اگر b به مجموعه‌ی A تعلق نداشته باشد، آن‌را به‌صورت $b \notin A$ نشان می‌دهند.

مثال ۱: کدام‌یک از دسته‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کنند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از هزار

ب) اعداد خیلی بزرگ

ج) چهار عدد فرد متوالی

د) مقسوم‌علیه‌های عدد سی

✎ حل:

اعداد طبیعی بزرگ‌تر از هزار و مقسوم‌علیه‌های عدد سی کاملاً مشخص می‌باشند. لذا هر کدام یک مجموعه را معرفی می‌کنند. اما اعداد خیلی بزرگ و چهار عدد فرد متوالی مشخص نیستند و مجموعه‌ای را نیز مشخص نمی‌سازند.

مثال ۲ : اگر $A = \{1, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$ کدام یک از عبارات زیر درست است؟

الف) $1 \in A$ ب) $2 \in A$ ج) $\{2\} \in A$ د) $3 \notin A$ هـ) $\{3\} \in A$ و) $\{2, 3\} \in A$

حل: 

قسمت‌های الف و ج و د درست و بقیه نادرست می‌باشند.

مثال ۳ : یک مجموعه‌ی سه عضوی بسازید که از هر دو عضو آن یکی عضو دیگری باشد.

حل: 

$\{5, \{5\}, \{5, \{5\}\}$

☆ مجموعه‌ی تهی

مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تهی را با نماد $\{\}$ یا \emptyset نشان می‌دهند.

مثال ۴ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۷ و ۸ مجموعه‌ی اعداد طبیعی منفی و مجموعه‌ی اعداد صحیح که مجذورشان منفی است، مثال‌هایی از مجموعه‌ی تهی هستند.

مثال ۵ : مجموعه‌ی $A = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$ چند عضو دارد؟

حل: 

مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی تک‌عضوی است.

☆ صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه

هر مجموعه را می‌توان به سه صورت نمایش داد:

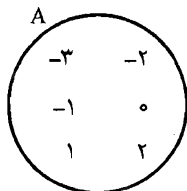
(۱) نمایش هندسی (نمودار ون)

(۲) نمایش تفصیلی (با اعضاها)

(۳) نمایش توصیفی (با علائم ریاضی)

نمایش هندسی مجموعه به این ترتیب است که اعضای

مجموعه را درون منحنی بسته‌ای قرار می‌دهند.



در روش تفصیلی اعضای مجموعه را به طور کامل داخل آکلاذ قرار می دهند.

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

صورت توصیفی مجموعه به این ترتیب است که یک متغیر را به عنوان نماینده ی اعضای مجموعه اختیار می کنیم و اعضای مجموعه را با توصیفی به آن متغیر نسبت می دهیم.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 2\}$$

مثال ۶ : مجموعه ی مقسوم علیه های صحیح عدد ۲۵ را با اعضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

 حل:

$$\{-25, -5, -1, 1, 5, 25\}$$

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{25}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$$

نکته: مجموعه ی اعداد طبیعی، اعداد حسابی، اعداد صحیح، اعداد زوج طبیعی و اعداد فرد طبیعی را به ترتیب با حروف N , W , Z , E و O نشان می دهند.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

مثال ۷ : مجموعه ی اعداد صحیح یک رقمی را با اعضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

 حل:

$$A = \{-9, -8, -7, \dots, 9\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -9 \leq x \leq 9\}$$

مثال ۸ : مجموعه ی اعداد صحیح زوج یک رقمی را با اعضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل 

$$\begin{aligned}
 B &= \{-۸, -۶, -۴, \dots, ۸\} \\
 &= \{x \mid x = ۲k, k \in \mathbb{Z}, -۴ \leq k \leq ۴\} \\
 &= \{۲k \mid k \in \mathbb{Z}, -۴ \leq k \leq ۴\}
 \end{aligned}$$

مثال ۹: مجموعه‌ی مضارب صحیح ۳ را با اعضوها و علائم ریاضی نشان دهید.

حل 

$$\begin{aligned}
 C &= \{\dots, -۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹, \dots\} \\
 &= \{۳k \mid k \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$

مثال ۱۰: مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید:

$$\begin{aligned}
 A &= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -۷\} & B &= \{x \mid x = ۲k, k \in \mathbb{Z}\} \\
 C &= \{x \mid x = ۲k + ۱, k \in \mathbb{Z}\} & D &= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^۲ \leq ۱۶\} \\
 E &= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}\} & F &= \{۲^x \mid x \in \mathbb{N}\}
 \end{aligned}$$

حل 

$$\begin{aligned}
 A &= \{-۶, -۵, -۴, \dots\} \\
 B &= \{\dots, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, \dots\} \\
 C &= \{\dots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \dots\} \\
 D &= \{-۴, -۳, -۲, \dots, ۴\} \\
 E &= \{۰, -۱, -۴, -۹, \dots\} \\
 F &= \{۲, ۴, ۸, ۱۶, \dots\}
 \end{aligned}$$

مثال ۱۱: هریک از مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی مشخص کنید.

$$\begin{aligned}
 A &= \{۲, ۵, ۸, ۱۱, \dots, ۹۸\} & B &= \{۰, ۱, ۳, ۷, \dots\} \\
 C &= \{\dots, -۱۵, -۵, ۵, ۱۵, ۲۵, \dots\} & D &= \left\{ \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۱, \dots \right\} \\
 E &= \{۹, ۹۹, ۹۹۹, \dots\} & F &= \{۲, ۱۱, ۱۰۱, ۱۰۰۱, \dots\}
 \end{aligned}$$

حل: 

$$A = \{3k - 1 | k \in \mathbb{N}, k \leq 33\}$$

$$B = \{2^x - 1 | x \in W\}$$

$$C = \{10k - 5 | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \{2^x | x \in \mathbb{Z}, x \geq -3\}$$

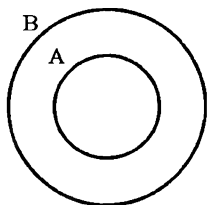
$$E = \{10^x - 1 | x \in \mathbb{N}\}$$

$$F = \{10^x + 1 | x \in W\}$$

☆ زیر مجموعه

مجموعه‌ی A را زیر مجموعه‌ی B گویند، در صورتی که تمام عضوهای A در B باشد و آن را با نماد $A \subset B$ نشان می‌دهند.

به عنوان مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ آن گاه $A \subset B$.



مثال ۱۲: اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, x < -17\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, x < -7\}$ کدام یک از

این دو مجموعه، زیر مجموعه‌ی دیگری است؟

حل: 

$$A = \{-18, -19, -20, \dots\}$$

$$B = \{-8, -9, -10, \dots\}$$

تمام اعضای A در B نیز وجود دارد. پس: $A \subset B$

مثال ۱۳: اگر A مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۴۸ و B مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۲۴ باشد،

کدام یک از این دو مجموعه زیر مجموعه‌ی دیگری است؟

حل: 

با توجه به این که ۴۸ بر ۲۴ بخش پذیر است می‌توان گفت هر مقسوم‌علیه ۲۴، مقسوم‌علیه ۴۸ نیز می‌باشد. پس: $B \subset A$

مثال ۱۴: اگر C مجموعه‌ی مضارب عدد ۱۸ و D مجموعه‌ی مضارب عدد ۹ باشد، کدام یک

از این دو مجموعه زیر مجموعه‌ی دیگری است؟

حل: 

تمام مضارب عدد ۱۸، مضارب عدد ۹ نیز می‌باشند. پس $C \subset D$.

نکته: \emptyset زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

نکته: هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است.

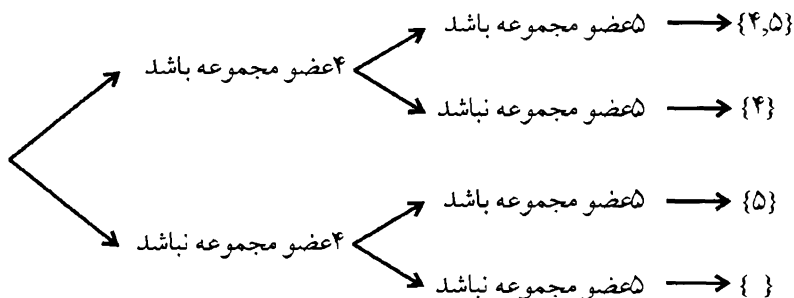
نکته: مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی B نیست، در صورتی که لاقل یک عضو A در B نباشد که آن را به صورت $A \not\subset B$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد اول زیرمجموعه‌ی اعداد فرد نیست زیرا عدد ۲ در مجموعه‌ی اعداد اول هست ولی در مجموعه‌ی اعداد فرد نیست.

مثال ۱۵: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۴, ۵\}$ را بنویسید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

حل: 

می‌خواهیم مجموعه‌هایی بسازیم که تمام اعضای آن در A باشند. با توجه به این که عدد ۴ یا ۵ عضو مجموعه باشند یا نباشند می‌توان حالت‌های زیر را در نظر گرفت:



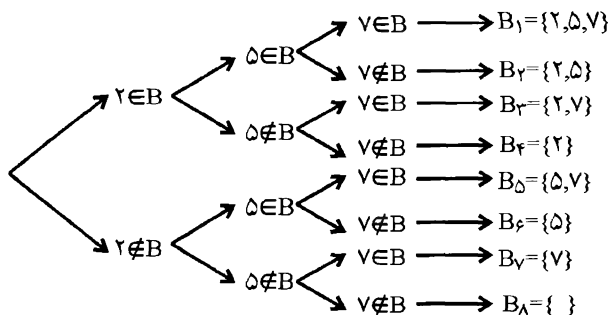
عدد ۴ عضو مجموعه باشد یا نباشد ۲ حالت پدید می‌آورد. به همین ترتیب ۵ عضو مجموعه باشد یا نباشد نیز ۲ حالت پدید می‌آورد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A برابر است با:

$$۲ \times ۲ = ۲^۲$$

مثال ۱۶: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۲, ۵, ۷\}$ را بنویسید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

حل: 

فرض می‌کنیم B زیرمجموعه‌ای از A باشد. حالت‌های زیر را می‌توان برای اعضای B در نظر گرفت:



بودن و نبودن عدد دو در مجموعه‌ی B ، 2 حالت، بودن و نبودن عدد 5 در مجموعه‌ی B ، 2 حالت و نبودن عدد 7 در مجموعه‌ی B نیز 2 حالت پدید می‌آورد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

☆ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

مثال ۱۷: همگی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $B = \{9, \{9\}, \{7\}\}$ را بنویسید.

حل: 

$$\emptyset, \{9\}, \{\{9\}\}, \{\{7\}\}, \{9, \{9\}\}, \{9, \{7\}\}, \{\{9\}, \{7\}\}, \{9, \{9\}, \{7\}\}$$

مثال ۱۸: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{2, 5\}, 5\}$ کدام یک از عبارت‌های زیر درست است؟

- | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| الف) $\emptyset \in A$ | ب) $\emptyset \subset A$ | ج) $\{\emptyset\} \subset A$ | د) $\{\emptyset\} \in A$ |
| هـ) $\{\{\emptyset\}\} \subset A$ | و) $\{2\} \in A$ | ز) $\{2\} \subset A$ | ح) $\{5\} \in A$ |
| ط) $\{5\} \subset A$ | ی) $\{\emptyset, \{5\}\} \subset A$ | ک) $\{\emptyset, 2\} \subset A$ | ل) $A \subset A$ |

حل: 

موارد الف، ب، ج، د، هـ، ط و ل درست و سایر موارد نادرست می‌باشند.

مثال ۱۹: یک مجموعه‌ی سه عضوی بسازید که از هر دو عضو آن یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.

حل: 

$$A = \{\emptyset, \{5\}, \{5, 8\}\}$$

مثال ۲۰: یک مجموعه‌ی ۹ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

حل: 

$$2^9 = 512$$

مثال ۲۱: مجموعه‌ی A دارای ۲۰۴۸ زیرمجموعه است. این مجموعه چند عضو دارد؟

حل: 

$$2048 = 2^{11} \rightarrow n(A) = 11$$

مثال ۲۲: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n + 4$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n - 1$ عضوی است؟

حل: 

$$\frac{2^{n+4}}{2^{n-1}} = \frac{2^n \times 2^4}{2^n \times 2^{-1}} = 2^5 = 32$$

مثال ۲۳: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $2n - 5$ عضوی شانزده برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n - 2$ عضوی است. مقدار n چه قدر است؟

حل: 

$$2^{2n-5} = 16 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-5} = 2^4 \times 2^{n-2}$$

$$2^{2n-5} = 2^{n+2} \Rightarrow 2n - 5 = n + 2 \Rightarrow n = 7$$

مثال ۲۴: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n + 6$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n + 2$ عضوی ۱۹۲۰ واحد بیش‌تر است. مقدار n چه قدر است؟

حل: 

$$2^{n+6} = 2^{n+2} + 1920 \Rightarrow 2^{n+6} - 2^{n+2} = 1920$$

$$2^n (2^6 - 2^2) = 1920 \Rightarrow 2^n \times 60 = 1920$$

$$2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

مثال ۲۵: سه مجموعه‌ی $n+3$ عضوی و $n+1$ عضوی و $n-2$ عضوی روی هم ۱۶۴

زیرمجموعه دارند. مقدار n چه قدر است؟

حل: 

$$2^{n+3} + 2^{n+1} + 2^{n-2} = 164 \Rightarrow 2^n (2^3 + 2^1 + 2^{-2}) = 164$$

$$2^n \times \frac{41}{4} = 164 \Rightarrow 2^n = 164 \times \frac{4}{41} \Rightarrow 2^n = 16 \rightarrow n = 4$$

☆ زیرمجموعه‌ی محض

همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جزء خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه

می‌نامند.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $2^n - 1$

مثال ۲۶: یک مجموعه‌ی ۷ عضوی چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

$$2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$$

حل: 

مثال ۲۷: تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی A برابر ۱۰۲۳ است. این مجموعه چند

عضوی است؟

حل: 

$$1023 + 1 = 1024$$

$$1024 = 2^{10} \rightarrow n(A) = 10$$

مثال ۲۸: اگر ۳ عضو به تعداد اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن

چه تغییری می‌کند؟

حل: 

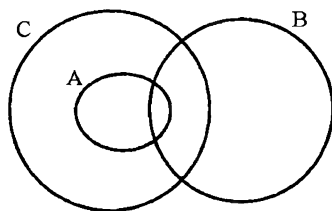
$$2^{n+3} \div 2^n = 2^3 = 8$$

تعداد زیرمجموعه‌ها ۸ برابر می‌شود.

قضیه: ثابت کنید اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ آن‌گاه: $A \subset C$.

برهان: اگر x عضو دلخواهی از مجموعه‌ی A باشد، با توجه به این‌که $A \subset B$ می‌باشد، می‌توان گفت x عضو B نیز هست و از آن جایی که $B \subset C$ است، نتیجه می‌شود x عضوی از C نیز هست. بنابراین هر عضو مجموعه‌ی A در C نیز هست، پس: $A \subset C$

$$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$$



مثال ۲۹: اگر $A \not\subset B$ و $B \not\subset C$ آیا

می‌توان گفت $A \not\subset C$ ؟

حل: 

خیر

مجموعه‌ی توان یک مجموعه

مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه‌ی توان آن مجموعه می‌نامند. مجموعه‌ی توان مجموعه‌ی A را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۳۰: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد $P(A)$ را مشخص کنید.

حل: 

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

مثال ۳۱: اگر $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$ باشد، $P(B)$ را بنویسید.

حل: 

$$P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}, B\}$$

مثال ۳۲: اگر $A = \{\emptyset\}$ باشد، $P(P(A))$ را مشخص کنید.

حل: 

$$P(A) = \{\emptyset, \{A\}\}$$

$$P(P(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{A\}\}, \{\emptyset, \{A\}\}\}$$

مثال ۱۳۳ : مجموعه‌ی $P(P(P(\emptyset)))$ را مشخص کنید.

حل: 

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

مثال ۱۳۴ : اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $B = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ و $A \subset X \subset B$

به جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد؟

حل: 

مجموعه‌ی X مجموعه‌ای است که همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A را داراست و عضوهای ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ... و ۲۰ را نیز می‌تواند اختیار کند. بنابراین تعداد مجموعه‌هایی که جای X می‌توانند قرار گیرند، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{11, 12, 13, \dots, 20\}$ یعنی $2^{10} = 1024$.

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی

مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. هر عضو را می‌توان با دو عضو دیگر انتخاب کرد و در یک مجموعه قرار داد.

$$\underline{\{1, 2\}}, \underline{\{1, 3\}}$$

$$\underline{\{2, 1\}}, \underline{\{2, 3\}}$$

$$\underline{\{3, 1\}}, \underline{\{3, 2\}}$$

به این ترتیب سه دسته مجموعه ساخته می‌شود. اما هر مجموعه دو بار نوشته شده است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر است با:

$$\frac{3 \times 2}{2} = 3$$

حال مجموعه‌ی n عضوی $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. هر عضو این مجموعه را می‌توان با $(n-1)$ عضو دیگر در یک مجموعه قرار داد که به این ترتیب n دسته زیرمجموعه‌ی دو عضوی نوشته می‌شود که هر دسته شامل $(n-1)$ مجموعه است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

مثال ۳۵ : یک مجموعه‌ی ۲۰ عضوی چند زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد؟

 حل:

$$\frac{20 \times (20-1)}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

☆ تساوی دو مجموعه

دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گویند، در صورتی که هر کدام زیرمجموعه‌ی دیگری باشد. به عنوان مثال دو مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{c, b, b, a, a, a\}$ با هم مساویند.

مثال ۳۶ : اگر $A = \{x-y, \{x\}\}$ و $B = \{\{7\}, 5\}$ باشد، مقادیر x و y را حساب کنید.

 حل:

$$\{x\} = \{7\} \rightarrow x = 7$$

$$x - y = 5 \rightarrow 7 - y = 5 \rightarrow y = 2$$

مثال ۳۷ : اگر $A = \{\{3\}, \{3, 3\}, \{3, 3, 3\}\}$ باشد، $P(A)$ را بنویسید.

 حل:

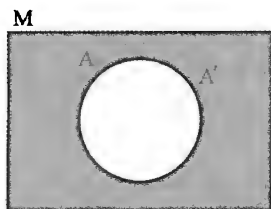
$$A = \{\{3\}, \{3, 3\}, \{3, 3, 3\}\} = \{\{3\}, \{3\}, \{3\}\} = \{\{3\}\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{\{3\}\}\}$$

☆ مجموعه‌ی مرجع

در هر بحث ریاضی مجموعه‌ای که حاوی مجموعه‌های دیگر باشد مجموعه‌ی مرجع نامیده می‌شود. مجموعه‌ی مرجع را با M نشان می‌دهیم.

☆ متمم یک مجموعه




متمم مجموعه‌ی A که آن را با A' نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن در M باشد ولی در A نباشد.

$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$

نکته: هر عضو مجموعه‌ی M یا به A تعلق دارد یا به A' .

نکته: اگر عضوی در A باشد در A' نیست و بالعکس.

مثال ۳۸: اگر $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 3, 4\}$ باشد، A' را مشخص کنید. 

$$A' = \{2, 5, 6\}$$

مثال ۳۹: اگر $M = Z$ و B مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج باشد، آن گاه B' مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد می‌باشد.

مثال ۴۰: اگر $M = \{x \mid x \in Z, x < -9\}$ و $C = \{x \mid x \in Z, x < -20\}$ باشد، C' را مشخص کنید.

 حل:

$$C' = \{x \mid x \in Z, x \geq -20\} = \{-20, -19, -18, \dots, -10\}$$

مثال ۴۱: اگر M مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۴۸ و D مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۶ باشد، D' را مشخص کنید.

$$M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

 حل:

$$D = \{1, 2, 4, 8, 16\} \Rightarrow D' = \{3, 6, 12, 24, 48\}$$

مثال ۴۲: اگر $M = \{2k \mid k \in Z\}$ و $A = \{4k \mid k \in Z\}$ متمم مجموعه‌ی A را با عضوها و با علائم ریاضی نشان دهید.

$$M = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

 حل:

$$A = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$A' = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} = \{4k - 2 \mid k \in Z\}$$

مثال ۴۳: اگر $B = \{a, b, c, d\}$ و $A = \{a, b\}$ و $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ مجموعه‌های A' و B' را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

حل: 

$$A' = \{c, d, e, f, g\} \quad B' = \{e, f, g\}$$

در این مثال $A \subset B$ می‌باشد. اما $A' \not\subset B'$ بلکه $B' \subset A'$.

قضیه: ثابت کنید اگر $A \subset B$ آن‌گاه $B' \subset A'$.

برهان: باید نشان دهیم تمام عضوهای B' در A' نیز می‌باشند. فرض می‌کنیم x عضوی دلخواه و از این به بعد ثابت از B' باشد.

$$x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{\text{فرض}} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

قضیه: ثابت کنید اگر دو مجموعه مساوی باشند، متمم‌های آن‌ها نیز مساویند.

برهان: فرض می‌کنیم $A = B$ و نشان می‌دهیم: $A' = B'$

$$A = B \Rightarrow (A \subset B, B \subset A) \Rightarrow (B' \subset A', A' \subset B') \Rightarrow A' = B'$$

قضیه: ثابت کنید متمم متمم یک مجموعه با خود مجموعه مساوی است.

$$(A')' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}' = \{x \mid x \in M, x \in A\} = A \quad \text{برهان:}$$

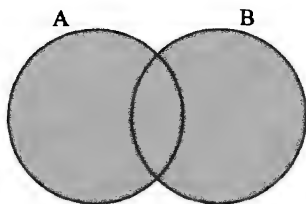
قضیه: ثابت کنید متمم مجموعه‌ی مرجع مجموعه‌ی تهی است.

$$M' = \{x \mid x \in M, x \notin M\} = \emptyset \quad \text{برهان:}$$

قضیه: ثابت کنید $\emptyset' = M$.

$$M' = \emptyset \Rightarrow (M')' = \emptyset' \Rightarrow M = \emptyset \quad \text{برهان:}$$

☆ اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که آن را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن یا در A باشند یا در B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال ۴۴: اگر $A = \{۵, ۶, ۷, ۸\}$ و $B = \{۷, ۸, ۹\}$ مجموعه‌ی $A \cup B$ را مشخص کنید.

حل:

$$A \cup B = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

مثال ۴۵: اگر $A = \{-۲۵, -۲۴, -۲۳, \dots, ۱۹\}$ و $B = \{-۱۲, -۱۱, -۱۰, \dots, ۴۰\}$ باشد $A \cup B$ را مشخص کنید.

حل:

$$A \cup B = \{-۲۵, -۲۴, -۲۳, \dots, ۴۰\}$$

مثال ۴۶: اگر $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -۱۵\}$ و $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < ۱۳\}$ باشد، $C \cup D$ را مشخص کنید.

حل:

$$C \cup D = \mathbb{Z}$$

مثال ۴۷: اگر:

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۹ < x < ۸\} \text{ و } F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۵ < x < ۱۷\}$$

باشد.

حل:

$$E \cup F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۹ < x < ۱۷\}$$

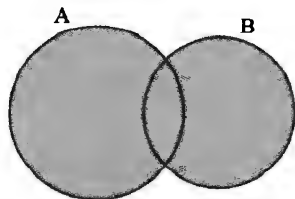
مثال ۴۸: اگر $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{۲} \in \mathbb{Z}\right\}$ و $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x+۱}{۲} \in \mathbb{Z}\right\}$

باشد، $A \cup B$ را مشخص کنید.

حل: 

A مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج و B مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد می‌باشد.

$$A \cup B = Z$$



نکته: اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه:

$$B \subset A \cup B \text{ و } A \subset A \cup B$$

مثال ۴۹: اگر $A = \{۳, ۵, ۷\}$ و $B = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۸\}$ ، $A \cup B$ را مشخص کنید.

حل: 

$$A \cup B = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۸\} = B$$

قضیه: اگر $A \subset B$ باشد، ثابت کنید $A \cup B = B$.

برهان: برای این‌که ثابت کنیم $A \cup B = B$ کافی است نشان دهیم:

$A \cup B \subset B$ و $B \subset A \cup B$ که رابطه‌ی اول بدیهی است. برای اثبات رابطه‌ی دوم فرض می‌کنیم x عضو

دلخواهی از $A \cup B$ باشد، در این صورت x یا متعلق به A است یا متعلق به مجموعه‌ی B .

اما با توجه به فرض در صورتی‌که x عضو A باشد متعلق به B نیز هست. پس: $A \cup B \subset B$

$$\left. \begin{array}{l} B \subset A \cup B \\ A \cup B \subset B \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = B$$

قضیه: ثابت کنید اگر $A \cup B = B$ آن‌گاه $A \subset B$.

برهان:

$$\left. \begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ A \cup B = B \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۵۰: ثابت کنید $A \cup A = A$.

حل: 

$$A \subset A \Rightarrow A \cup A = A$$

مثال ۵۱: ثابت کنید $A \cup \emptyset = A$.

حل: 

$$\emptyset \subset A \Rightarrow A \cup \emptyset = A$$

مثال ۵۲: ثابت کنید $A \cup M = M$.

حل: 

$$A \subset M \Rightarrow A \cup M = M$$

مثال ۵۳: اگر $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 2, 3\}$ باشد $A \cup A'$ را مشخص کنید.

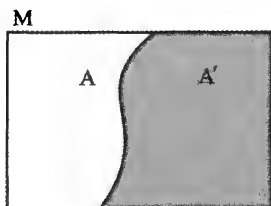
$$A' = \{4, 5, 6\}$$

حل: 

$$A \cup A' = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = M$$

مثال ۵۴: با نمودار ون نشان دهید $A \cup A' = M$.

حل: 



$$A \cup A' = M$$

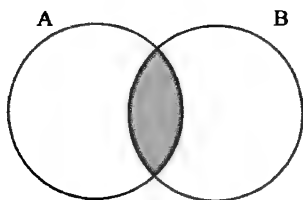
مثال ۵۵: اگر $A \cup B = \emptyset$ باشد، ثابت کنید $A = B = \emptyset$.

حل: 

$$\left. \begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ A \cup B = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A \subset \emptyset \\ \emptyset \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow A = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} B \subset A \cup B \\ A \cup B = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B \subset \emptyset \\ \emptyset \subset B \end{array} \right\} \Rightarrow B = \emptyset$$

☆ اشتراک دو مجموعه



اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که آن را با $A \cap B$

نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن

هم در A باشند و هم در B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

مثال ۵۶: اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ باشد، $A \cap B$ را مشخص کنید
حل:

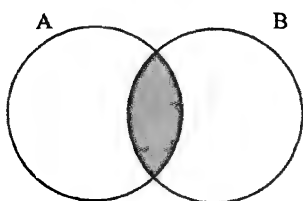
$$A \cap B = \{۴, ۵, ۶\}$$

مثال ۵۷: اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -۵ \leq x \leq ۳\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R}, -۲ \leq x < ۹\}$ باشد، $A \cap B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.
حل:

$$A \cap B = \{x | x \in \mathbb{R}, -۲ \leq x \leq ۳\}$$

مثال ۵۸: اگر $D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -۹\}$ و $C = \{x | x \in \mathbb{R}, x < -۱۵\}$ باشد، $C \cap D$ را مشخص کنید.
حل:

$$C \cap D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -۹\}$$



نکته: اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند،
آن‌گاه $A \cap B \subset B$ و $A \cap B \subset A$.

مثال ۵۹: اگر $A = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}$ و $B = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵\}$ باشند، $A \cap B$ را مشخص کنید.
حل:

$$A \cap B = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\} = A$$

قضیه: ثابت کنید اگر $A \subset B$ باشد، آن‌گاه $A \cap B = A$.

برهان: اگر x عضو دلخواهی از A باشد، با توجه به فرض عضو B نیز می‌باشد.
بنابراین $x \in A \cap B$ پس می‌توان گفت:

$$\left. \begin{array}{l} A \subset A \cap B \\ A \cap B \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = A$$

قضیه: اگر $A \cap B = A$ ثابت کنید، $A \subset B$.

برهان:

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset B \\ A \cap B = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۶۰: ثابت کنید $A \cap A = A$.

حل: 

$$A \subset A \Rightarrow A \cap A = A$$

مثال ۶۱: ثابت کنید $A \cap \emptyset = \emptyset$.

حل: 

$$\emptyset \subset A \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$$

مثال ۶۲: ثابت کنید $A \cap M = A$.

حل: 

$$A \subset M \Rightarrow A \cap M = A$$

مثال ۶۳: اگر $A = \{۷, ۸, ۹\}$ و $M = \{۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}$ باشد، $A \cap A'$ را مشخص کنید.

حل: 

$$A' = \{۱۰, ۱۱, ۱۲\}$$

$$A \cap A' = \{۷, ۸, ۹\} \cap \{۱۰, ۱۱, ۱۲\} = \emptyset$$

مثال ۶۴: ثابت کنید $A \cap A' = \emptyset$.

حل: 

$$A \cap A' = \{x \mid x \in A, x \in A'\} = \{x \mid x \in A, x \notin A\} = \emptyset$$

مثال ۶۵: اگر $A \cap B = M$ باشد، ثابت کنید $A = B = M$.

حل: 

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B = M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \subset A \\ A \subset M \end{array} \right\} \Rightarrow A = M$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset B \\ A \cap B = M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \subset B \\ B \subset M \end{array} \right\} \Rightarrow B = M$$

نکته: اجتماع و اشتراک n مجموعه‌ی A_1, A_2, \dots, A_n را به ترتیب با نمادهای

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ و } \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ نشان می‌دهند.}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

☆ دو مجموعه‌ی جدا از هم

دو مجموعه‌ی A و B را جدا از هم گویند، در صورتی که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

$$A \cap B = \emptyset$$

یعنی:

مثال ۶۶: مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد فرد دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

مثال ۶۷: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم و B و C نیز دو مجموعه‌ی جدا از هم

باشند آیا می‌توان گفت A و C نیز جدا از همند؟

حل: 

خیر، زیرا:

$$A = \{1, 2\} \text{ و } B = \{3, 4\} \text{ و } C = \{1, 5\}$$

در این مثال A و B جدا از هم و B و C نیز جدا از همند. اما A و C جدا از هم نیستند.

مثال ۶۸: اگر دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آیا متممشان نیز جدا از هم خواهند بود؟

حل: 

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

خیر، زیرا:

$$A = \{1, 2\} \text{ و } B = \{3, 4\}$$

$$A' = \{3, 4, 5\} \text{ و } B' = \{1, 2, 5\}$$

A و B جدا از همدیگر ولی A' و B' عضو مشترک دارند.

مثال ۶۹: طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } (A \cup M')' \cup (A \cup \emptyset)' \quad \text{ب) } (A \cap M')' \cap (\emptyset' \cup A)'$$

$$\text{ج) } (A \cup \emptyset)' \cup (A \cup M') \quad \text{د) } (A' \cup A)' \cup (A \cap A)'$$

حل: 

$$\begin{aligned} \text{الف) } (A \cup M')' \cup (A \cup \emptyset)' &= (A \cup \emptyset)' \cup (A \cup M)' = A' \cup M' \\ &= A' \cup \emptyset = A' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } (A \cap M')' \cap (\emptyset' \cup A)' &= (A \cap \emptyset)' \cap (M \cup A)' = \emptyset' \cap M' \\ &= M \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

$$\text{ج) } (A \cup \emptyset)' \cup (A \cup M') = A' \cup (A \cup \emptyset) = A' \cup A = M$$

$$\text{د) } (A' \cup A)' \cup (A \cap A)' = M' \cup \emptyset' = \emptyset \cup M = M$$

☆ خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه

(۱) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری):

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(۲) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی):

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(۳) خاصیت پخش‌پذیری (توزیع‌پذیری):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(۴) قوانین دمرگان:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

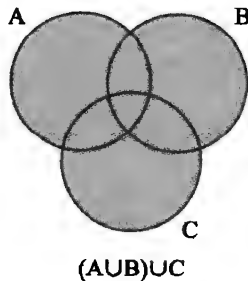
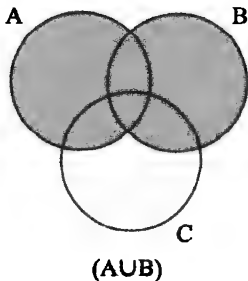
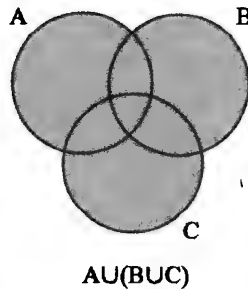
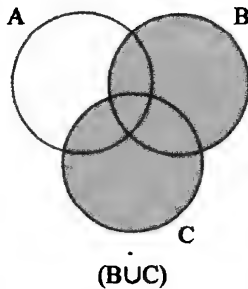
(۵) قوانین جذب:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

مثال ۷۰: درستی خاصیت شرکت پذیری اجتماع را با نمودار ون تحقیق کنید.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

حل: 

مثال ۷۱: صحت خاصیت شرکت پذیری اجتماع را با مثال نشان دهید:


حل: 

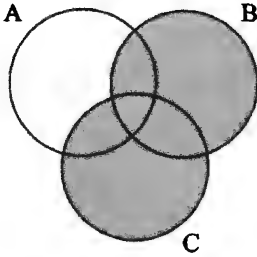
$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad C = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

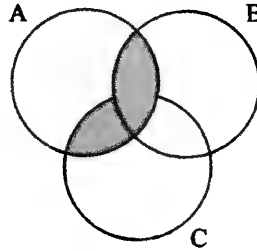
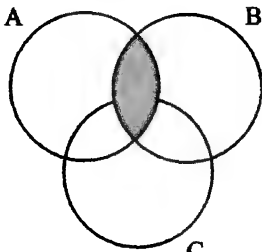
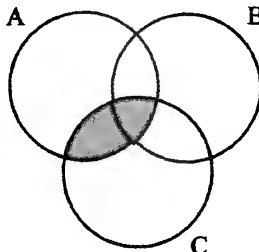
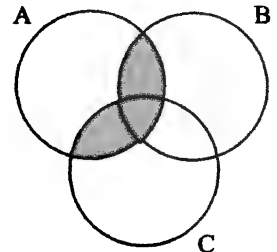
$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

مثال ۷۲: درستی خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع را با نمودار ون تحقیق کنید.
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ حل: 




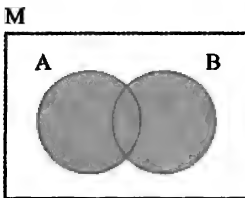
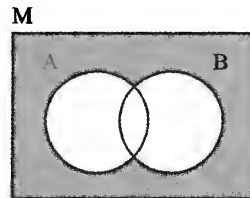
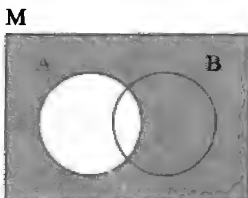
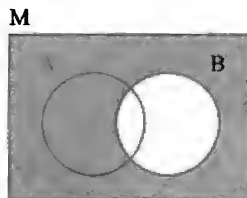
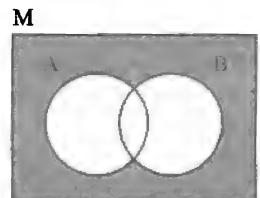
(BUC)

 $A \cap (B \cup C)$  $(A \cap B)$  $(A \cap C)$  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ملاحظه می‌شود:

مثال ۷۳: درستی رابطه‌ی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را با نمودار ون نشان دهید.
 حل: 

 $(A \cup B)$  $(A \cup B)'$  A'  B'  $A' \cap B'$

ملاحظه می شود:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

مثال ۷۴: صحت تساوی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را با مثال بررسی کنید.

حل: 

$$M = \{a, b, c, d, e, f\} \quad A = \{a, d\} \quad B = \{d, e, f\}$$

$$A' = \{b, c, e, f\} \quad B' = \{a, b, c\} \quad A \cup B = \{a, d, e, f\}$$

$$\left. \begin{aligned} (A \cup B)' &= \{b, c\} \\ A' \cap B' &= \{b, c\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

☆ اثبات قوانین جذب

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

اثبات: $A \cup (A \cap B) = (A \cap M) \cup (A \cap B) = A \cap (M \cup B) = A \cap M = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

اثبات: $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A$

مثال ۷۵: اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A' \cup B = \{5, 6, 7, 8\}$ باشند، حاصل $A \cap B'$ را به دست آورید.

حل: 

$$A \cap B' = (A' \cup B)' = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$$

اثبات:

$$A \cap (A' \cap B) = \emptyset$$

مثال ۷۶: ثابت کنید:

حل: 

$$A \cap (A' \cap B) = (A \cap A') \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cup B' = M$$

مثال ۷۷: ثابت کنید:

حل: 

$$(A \cup B) \cup B' = A \cup (B \cup B') = A \cup M = M$$

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

مثال ۷۸ : ثابت کنید:

حل: 

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

$$(A' \cup B) \cup (A \cup B') = M$$

مثال ۷۹ : ثابت کنید:

حل: 

$$(A' \cup B) \cup (A \cup B') = (A' \cup A) \cup (B \cup B') = M \cup M = M$$

$$(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \emptyset$$

مثال ۸۰ : ثابت کنید:

حل: 

$$(A \cap B') \cap (A' \cap B) = (A \cap A') \cap (B' \cap B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A \cup B') \cap (A \cup B) = A$$

مثال ۸۱ : ثابت کنید:

حل: 

$$(A \cup B') \cap (A \cup B) = A \cup (B' \cap B) = A \cup \emptyset = A$$

$$(A' \cap B) \cup (A' \cap B') = A'$$

مثال ۸۲ : ثابت کنید:

حل: 

$$(A' \cap B) \cup (A' \cap B') = A' \cap (B \cup B') = A' \cap M = A'$$

$$A \cup (A \cap B')' = M$$

مثال ۸۳ : ثابت کنید:

حل: 

$$A \cup (A \cap B')' = A \cup (A' \cup B) = (A \cup A') \cup B = M \cup B = M$$

$$(A \cup B') \cup (A' \cap B) = M$$

مثال ۸۴ : ثابت کنید:

حل: 

$$(A \cup B') \cup (A' \cap B) = (A \cup B') \cup (A \cup B')' = M$$

$$(A \cup M') \cup (A' \cup B)' = A$$

مثال ۸۵ : ثابت کنید:

حل: 

$$(A \cup M') \cup (A' \cup B)' = (A \cup \emptyset) \cup (A \cap B') = A \cup (A \cap B') = A$$

$$(A \cap B') \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

مثال ۸۶: ثابت کنید:

حل: 

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A' \cup B') &= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \\ &= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \\ &= \emptyset \cup (B \cap A') \cup (A \cap B') \cup \emptyset \\ &= (B \cap A') \cup (A \cap B') \\ &= (A \cap B') \cup (B \cap A') \end{aligned}$$

نکته: اگر $A = B$ باشد، آن گاه $A \cap C = B \cap C$ و $A \cup C = B \cup C$.مثال ۸۷: اگر $A \cap C = B \cap C$ باشد، آیا می توان گفت $A = B$ ؟ چرا؟حل: 

خیر، زیرا اگر در نظر بگیریم:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 3, 4\} \quad C = \{2, 3, 5\}$$

$$A \cap C = \{2, 3\} \text{ و } B \cap C = \{2, 3\}$$


ملاحظه می شود $A \cap C = B \cap C$ ولی $A \neq B$.قضیه: اگر $A \cup C = B \cup C$ و $A \cap C = B \cap C$ ، ثابت کنید: $A = B$.

برهان:


$$A \xrightarrow{\text{جذب}} A \cap (A \cup C) \xrightarrow{\text{فرض}} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

$$= B \cap (A \cup C) \xrightarrow{\text{فرض}} B \cap (B \cup C) \xrightarrow{\text{جذب}} B$$


مثال ۸۸: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $B' \cap (A \cup B) = A$  حل:

$$\begin{aligned} B' \cap (A \cup B) &= (B' \cap A) \cup (B' \cap B) = (B' \cap A) \cup \emptyset \\ &= (B' \cap A) \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap M = A \end{aligned}$$

مثال ۸۹: اگر $A \subset B$ ثابت کنید: $A' \cup B = M$  حل:

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \quad (۱)$$

$$A' \cup B \stackrel{(۱)}{=} A' \cup (A \cup B) = (A' \cup A) \cup B = M \cup B = M$$

مثال ۹۰: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A \subset B'$  حل:

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Rightarrow (A \cap B) \cup B' = \emptyset \cup B' \\ &\Rightarrow (A \cup B') \cap (B \cup B') = B' \\ &\Rightarrow (A \cup B') \cap M = B' \Rightarrow A \cup B' = B' \Rightarrow A \subset B' \end{aligned}$$

مثال ۹۱: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید $A \cup B' = B'$ و بالعکس.

 حل:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow B' \cup (A \cap B) = B' \cup \emptyset \Rightarrow B' \cup A = B'$$

برعکس:

$$\begin{aligned} A \cup B' = B' &\Rightarrow B \cap (A \cup B') = B \cap B' \Rightarrow (B \cap A) \cup (B \cap B') = \emptyset \\ &\Rightarrow (B \cap A) \cup \emptyset = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

مثال ۹۲: اگر $A \subset B$ ثابت کنید $A \cap B' = \emptyset$ و بالعکس.

 حل:

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \quad (۱)$$

$$A \cap B' \stackrel{(۱)}{=} (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

و برعکس:

$$A \cap B' = \emptyset \Rightarrow (A \cap B') \cup B = \emptyset \cup B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۹۳: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A \cap B' = A$.حل: 

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap B' = (A \cap B') \cup \emptyset = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B)$$

$$= A \cap M = A$$

مثال ۹۴: اگر $A \subset B$ ثابت کنید:

الف) $A \cup C \subset B \cup C$

ب) $A \cap C \subset B \cap C$

حل: 

برای اثبات قسمت (الف) کافی است نشان دهیم:

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = B \cup C$$

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (C \cup C) \stackrel{\text{فرض}}{=} B \cup C$$

برای اثبات قسمت (ب) کافی است نشان دهیم:

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap C$$

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (C \cap C) \stackrel{\text{فرض}}{=} A \cap C$$

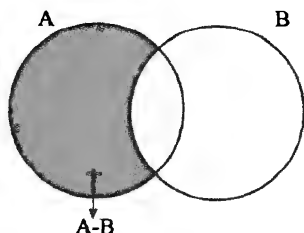
☆ عمل تفاضل

تفاضل دو مجموعه‌ی A و B که آن را به صورت $A - B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشند ولی در B نباشند.

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

نکته: از تعریف فوق نتیجه می‌شود:

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A, x \notin B$$



مثال ۹۵: اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ حاصل $A - B$ و $B - A$ را مشخص کنید.

حل: 

$$A - B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} - \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} = \{۱, ۲\}$$

$$B - A = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} - \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} = \{۶, ۷\}$$

مثال ۹۶: اگر $A = \left\{x \mid \frac{x}{۲} \in Z\right\}$ و $B = \left\{x \mid \frac{x}{۴} \in Z\right\}$ ، مجموعه‌ی $A - B$ را با علامت ریاضی مشخص کنید.

حل: 

$$A - B = \{\dots, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, \dots\} - \{\dots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, \dots\}$$

$$= \{\dots, -۶, -۲, ۲, ۶, \dots\} = \{۴x - ۲ \mid x \in Z\}$$

قضیه: ثابت کنید $A - B \subset A$.

برهان:

$$x \in A - B \Rightarrow (x \in A \text{ و } x \notin B) \Rightarrow x \in A$$

قضیه: ثابت کنید $A - B = A \cap B'$.

برهان:

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \in B') \Leftrightarrow x \in A \cap B'$$

مثال ۹۷: ثابت کنید تساوی‌های زیر همواره درستند:

الف) $A - A = \emptyset$

ب) $A - \emptyset = A$

ج) $\emptyset - A = \emptyset$

د) $M - A = A'$

هـ) $A - M = \emptyset$

و) $A - A' = A$

حل: 

$$\text{الف) } A - A = A \cap A' = \emptyset$$

$$\text{ب) } A - \emptyset = A \cap \emptyset' = A \cap M = A$$

$$\text{ج) } \emptyset - A = \emptyset \cap A' = \emptyset$$

$$\text{د) } M - A = M \cap A' = A'$$

$$\text{هـ) } A - M = A \cap M' = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{و) } A - A' = A \cap (A')' = A \cap A = A$$

مثال ۹۸: اگر $A \subset B$ ثابت کنید $A - B = \emptyset$ و بالعکس.

حل: 

$$A \subset B \rightarrow A \cap B = A \quad (۱)$$

$$A - B = A \cap B' \stackrel{(۱)}{=} (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

برعکس:

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \cap B' = \emptyset$$

$$\Rightarrow B \cup (A \cap B') = B \cup \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cup B = B$$

$$\Rightarrow A \subset B$$

مثال ۹۹: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید $A - B = A$ و برعکس.

حل: 

فرض می‌کنیم $A \cap B = \emptyset$. بنابراین:

$$A - B = (A - B) \cup \emptyset = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B)$$

$$= A \cap M = A$$

برعکس:

$$A - B = A \Rightarrow B \cap (A - B) = B \cap A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

مثال ۱۰۰: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $A - (A \cap B) = A - B$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

ج) $A - B = B' - A'$

د) $(A \cup B') \cap (A' \cup B) = (B' - A) \cup (A - B')$

هـ) $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

و) $A - (B - A) = A$

حل: 

الف) $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = A \cap B' = A - B$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B)$

$= A \cap M = A$

ج) $A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$

د) $(A \cup B') \cap (A' \cup B) = [(A \cup B') \cap A'] \cup [(A \cup B') \cap B]$

$= (B' \cap A') \cup (A \cap B) = (B' - A) \cup (A - B')$

هـ) $(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C')$

$= [(A \cup B) \cap B'] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

و) $A - (B - A) = A - (B \cap A') = A \cap (B \cap A')' = A \cap (B' \cup A) = A$

مثال ۱۰۱: با یک مثال تحقیق کنید عمل تفاضل دارای خاصیت شرکت‌پذیری هست یا

خیر؟

حل: 

$A = \{a, b, c\} \quad B = \{b, c, d\} \quad C = \{c, d, e\}$

$(A - B) - C = \{a\} - \{c, d, e\} = \{a\}$

$A - (B - C) = \{a, b, c\} - \{b\} = \{a, c\}$

$(A - B) - C \neq A - (B - C)$

ملاحظه می‌شود:

مثال ۱۰۲: ثابت کنید اشتراک از سمت چپ روی تفاضل توزیع‌پذیر است، یعنی:

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

حل: 

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\
 &= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') = \emptyset \cup (A \cap B \cap C') \\
 &= A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C)
 \end{aligned}$$

مثال ۱۰۳: ثابت کنید تفاضل از راست بر اجتماع توزیع پذیر است.

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

حل: 

$$\begin{aligned}
 (A - C) \cup (B - C) &= (A \cap C') \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap C' \\
 &= (A \cup B) - C
 \end{aligned}$$

مثال ۱۰۴: بدون عضوگیری ثابت کنید اگر $A \subset B$ آن گاه $B' \subset A'$ و بالعکس.حل: 

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow (A \cup B)' = B' \Leftrightarrow A' \cap B' = B' \Leftrightarrow B' \subset A'$$

مثال ۱۰۵: بدون عضوگیری ثابت کنید اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ آن گاه $A \subset C$.حل: 

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$B \subset C \Leftrightarrow B \cap C = B$$

$$A = A \cap B = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C \Rightarrow A \subset C$$

مثال ۱۰۶: ثابت کنید اگر $A - B = B - A$ آن گاه $A = B$.حل: 

$$A - B = B - A \Rightarrow A \cap B' = B \cap A'$$

$$A \cup (A \cap B') = A \cup (B \cap A') \Rightarrow A = A \cup B \quad (۱)$$

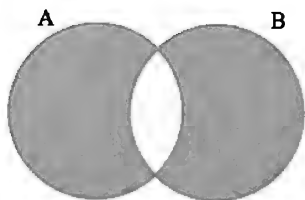
$$A - B = B - A \Rightarrow A \cap B' = B \cap A'$$

$$\Rightarrow B \cup (A \cap B') = B \cup (B \cap A')$$

$$\Rightarrow B \cup A = B \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow A = B$$

☆ عمل تفاضل متقارن



تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B که آن را با $A \Delta B$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال ۱۰۷: اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵\}$ مجموعه‌ی $A \Delta B$ را مشخص کنید.

✎ حل:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{۱, ۲\} \cup \{۵\} = \{۱, ۲, ۵\}$$

خواص تفاضل متقارن دو مجموعه

۱) $A \Delta A = \emptyset$

$$A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

اثبات:

۲) $A \Delta \emptyset = A$

$$A \Delta \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$$

اثبات:

۳) $A \Delta M = A'$

$$A \Delta M = (A - M) \cup (M - A) = \emptyset \cup A' = A'$$

اثبات:

۴) $A \Delta A' = M$

$$A \Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$$

اثبات:

۵) $A \Delta B = B \Delta A$ خاصیت جابه‌جایی

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$$

اثبات:

۶) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

اثبات:

$$= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B)$$

$$= (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$$

۷) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ خاصیت شرکت‌پذیری

$$A \Delta (B \Delta C) = A \Delta [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
&= \{A \cup [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]\} \cap \{A' \cup [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]\} \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B' \cup C') \cap \{A' \cup [(B' \cap C') \cup (B \cap C)]\} \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B' \cup C') \cap \{A' \cup [(B' \cap C') \cup B] \cap [(B' \cap C') \cup C]\} \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B' \cup C') \cap \{A' \cup [(C' \cup B) \cap (B' \cup C)]\} \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B' \cup C') \cap (A' \cup C' \cup B) \cap (A' \cup B' \cup C) \quad (۱) \\
(A \Delta B) \Delta C &= \{[(A \cup B) \cap (A' \cup B')]\cup C\} \cap \{[(A \cup B) \cap (A' \cup B')]\cup C'\} \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap [(A \cup B)' \cup (A' \cup B')' \cup C'] \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap [(A' \cap B') \cup (A \cap B) \cup C'] \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap \{[(A' \cap B') \cup A] \cap [A' \cap B' \cup B]\} \cup C' \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap \{[(B' \cap A) \cap (A' \cup B)] \cup C'\} \\
&= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap (A \cup B' \cup C') \cap (A' \cup B \cup C') \quad (۲) \\
(۱), (۲) &\Rightarrow A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C
\end{aligned}$$

$$۸) A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$$

اثبات: طرفین تساوی $A \Delta B = A \Delta C$ را از طرف چپ با A ترکیب می‌کنیم.

$$A \Delta (A \Delta B) = A \Delta (A \Delta C)$$

$$(A \Delta A) \Delta B = (A \Delta A) \Delta C \Rightarrow \emptyset \Delta B = \emptyset \Delta C \Rightarrow B = C$$

$$۹) A \Delta B = \emptyset \Rightarrow A = B$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Rightarrow (A - B = \emptyset, B - A = \emptyset) \quad \text{اثبات:}$$

$$\Rightarrow A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$$

مثال ۱۰۸: اگر $A \subset B$ ثابت کنید: $A \Delta B = B - A$.

حل: 

$$A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \cup (B - A) = B - A$$


مثال ۱۰۹: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A \Delta B = A \cup B$.

 حل:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$

دو مجموعه‌ی هم‌ارز

فرض کنید A مجموعه‌ی صندلی‌های موجود در یک سالن و B مجموعه‌ی افرادی باشند که باید روی صندلی‌ها بنشینند. اگر پس از نشستن همه‌ی افراد هیچ صندلی خالی نماند و هیچ شخصی سرپا نماند، در این حالت می‌گوییم هر صندلی به یک فرد و هر فرد به یک صندلی نظیر شده است.

 **تعریف:** بین دو مجموعه‌ی A و B یک تناظر یک به یک وجود دارد، هرگاه بتوان به هر عضو A یک و تنها یک عضو B و به هر عضو B یک و تنها یک عضو A را نظیر کرد. در مثال فوق بین مجموعه‌ی صندلی‌های موجود در سالن و مجموعه‌ی افراد یک تناظر یک به یک برقرار است.

☆ دو مجموعه‌ی هم‌ارز (معادل)

دو مجموعه‌ی A و B را هم‌ارز گویند در صورتی که بین اعضای دو مجموعه حداقل یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد. هم‌ارزی دو مجموعه‌ی A و B را به صورت $A \simeq B$ نشان می‌دهند.

مثال ۱۱۰: اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ و $B = \{a, b, c, \dots, z\}$ می‌توان گفت دو مجموعه‌ی A و B هم‌ارزند زیرا می‌توان بین اعضای این دو مجموعه یک تناظر یک به یک به صورت زیر برقرار کرد.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \dots, & 26 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ a, & b, & c, & \dots, & z \end{array}$$

مثال ۱۱۱: مجموعه‌ی مردم ایران و مجموعه‌ی شناسنامه‌هایشان دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

مثال ۱۱۲: مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \dots, & 2n, & \dots \end{array}$$

مثال ۱۱۳: مجموعه‌ی $A = \{x^2 | x \in N\}$ و مجموعه‌ی N دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

مثال ۱۱۴: مجموعه‌ی اعداد صحیح و مجموعه‌ی مضارب صحیح عدد ۵ دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots$$

مثال ۱۱۵: مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰ و مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ هم‌ارز نیستند.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

☆ تعریف قطعه‌ای از اعداد طبیعی

فرض کنیم k یک عدد طبیعی باشد. مجموعه‌ی $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ را قطعه‌ای از اعداد طبیعی می‌نامند.

مثال ۱۱۶:

$$N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ و } N_{50} = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

☆ مجموعه‌ی متناهی

مجموعه‌ی A را متناهی گویند، هرگاه تهی باشد و یا با قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم‌ارز باشد.

☆ عدد اصلی یک مجموعه

تعداد عضوهای مجموعه‌ی متناهی A را عدد اصلی A گفته با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که $n(\emptyset) = 0$ و اگر $N_k \simeq A$ آن‌گاه $n(A) = k$.

🔗 **نکته:** اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، در این صورت می‌توان گفت:

$$A \simeq B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$$

☆ مجموعه نامتناهی

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی نامیده می‌شود. برای مجموعه‌ی نامتناهی عدد اصلی تعریف نمی‌شود.

مثال ۱۱۷: هریک از مجموعه‌های $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ و $B = \{2, 4, 8, \dots, 2^{50}\}$

$C = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$ متناهی‌اند. زیرا $n(A) = 5$ ، $n(B) = 50$ و

چون $C = \{-1, 1\}$ لذا $n(C) = 2$ اما هریک از مجموعه‌های W ، N ، Z ، $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ ، $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ، R و ... نامتناهی‌اند.

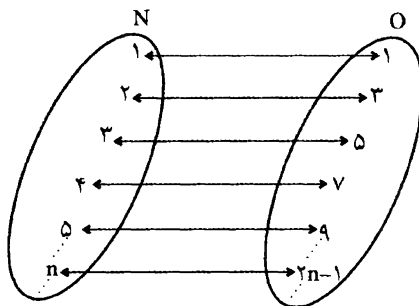
☞ **نکته:** هر مجموعه که زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، خود نامتناهی است.

☞ **نکته:** هر مجموعه که با یک زیرمجموعه‌ی محض خودش هم‌ارز باشد، نامتناهی است.

مثال ۱۱۸: نشان دهید مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N) با مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد (O) هم‌ارز است.

✎ **حل:**

تناظر زیر را در نظر می‌گیریم:



بدیهی است که با روند نشان داده شده در بالا تناظر ارائه شده یک تناظر یک به یک است. بنابراین مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد هم‌ارزند.

اگر یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه برقرار شود، بهتر است قانون یا ضابطه‌ای که طی آن هر عضو مجموعه‌ی اول (معمولاً مجموعه‌ی سمت چپ در نمودار را مجموعه‌ی اول گویند) به

یک و فقط یک عضو مجموعه‌ی دوم و بالعکس مربوط می‌شوند را مشخص کنیم. با دقت در تناظر بالا درمی‌یابیم که هر عضو n از N با عضو $2n - 1$ از O مرتبط است. این ارتباط را این‌گونه نشان می‌دهند:

$$N \longleftrightarrow O$$

$$n \longleftrightarrow 2n - 1$$

با داشتن این ضابطه به سؤالات زیادی می‌توان پاسخ داد. این که در این تناظر عضو 1378 از N با عضو $2755 = 2 \times 1378 - 1$ از O مرتبط است. یا عضو 101 از O با عضو 51 از N مرتبط می‌باشد. زیرا:

$$2k - 1 = 101 \Rightarrow 2k = 102 \Rightarrow k = 51$$

و نکات دیگری از این قبیل. به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۱۱۹: فرض کنید در یک سالن تخیلی تعدادی نامتناهی صندلی یک‌نفره موجود باشند

و برای شماره‌گذاری صندلی‌ها از شماره‌های ۱، ۲، ۳ ... استفاده شده باشد! فرض کنید تعداد نامتناهی دانش‌آموز در پشت درب این سالن تخیلی ایستاده‌اند تا در زمان اعلام شده وارد سالن شده و بر روی صندلی‌ها بنشینند. شخصی در مقابل درب ورودی ایستاده و می‌خواهد به هریک از دانش‌آموزان یکی از شماره‌های ۱، ۲، ۳ ... را ارائه دهد تا هر دانش‌آموز بر صندلی‌ای که شماره‌ی آن در دستش می‌باشد قرار گیرد. ناگهان فرد شماره دهنده متوجه می‌شود که شماره‌های زوج ۲، ۴، ۶ ... را با خود نیاورده و فقط شماره‌های فرد ۱، ۳، ۵ ... را به همراه دارد. به ناچار بر اثر ازدحام دانش‌آموزان مجبور می‌شود که فقط به هر دانش‌آموز یک شماره‌ی فرد را بدهد و دانش‌آموزان وارد سالن می‌شوند. اگر بخواهیم هیچ صندلی‌ای خالی نماند، باید این محدودیت را که هر دانش‌آموز روی صندلی‌ای بنشیند که شماره‌اش در دستش می‌باشد را اعمال نکنیم. آیا می‌توانید بگویید افراد از چه فرمولی برای یافتن صندلی خودشان استفاده کنند تا این مشکل حل شود؟

 **حل:**

گرچه صورت سؤال کمی طولانی شده ولی این مثال همان مثال قبل است. یعنی می‌خواهیم بین O و N یک تناظر یک به یک برقرار کنیم. در این تناظر شخصی که شماره‌ی $2k - 1$ را دارد می‌تواند بر صندلی شماره‌ی k بنشیند. برای یافتن k می‌تواند به شماره‌ی نوشته شده در

دستش یک واحد اضافه کند و حاصل را بر ۲ تقسیم نماید.

$$\frac{(2k-1)+1}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

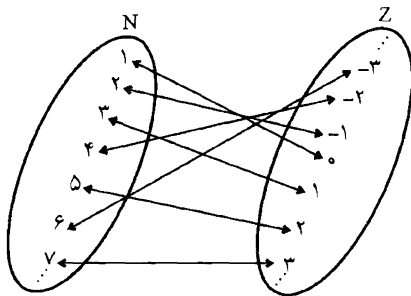
☆ مجموعه‌ی شمارا (شمارش‌پذیر)

هر مجموعه که با قطعه‌ای از اعداد طبیعی یا خود اعداد طبیعی هم‌ارز باشد مجموعه‌ی شمارا نامیده می‌شود. در مثال‌های بالا نشان داده‌ایم که O شمارا می‌باشد.

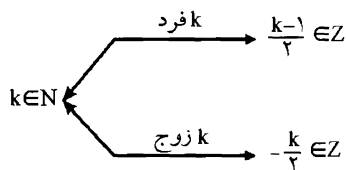
مثال ۱۲۰: نشان دهید Z شمارا می‌باشد.

حل: 

تناظر زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌گردد که اعضاء فرد N با اعضاء غیرمنفی Z و اعضاء زوج N با اعضاء منفی Z مرتبط شده‌اند. به عبارتی برای بیان قانون این هم‌ارزی باید ابتدا عضو k از N را انتخاب کرده و سپس با توجه به زوج یا فرد بودن آن، ارتباط k را با عضوهای Z مشخص کنیم.



مثال ۱۲۱: در هم‌ارزی فوق:

(الف) عضو ۱۰۳ از N با چه عضوی Z در ارتباط است؟

(ب) عضو ۸۲ از N با چه عضوی Z در ارتباط است؟

(ج) عضو ۵۴ از Z با چه عضوی از N در ارتباط است؟

(د) عضو -۱۳ از Z با چه عضوی از N در ارتباط است؟

حل: 

الف) چون $103 \in N$ فرد است، با توجه به ضابطه‌ی داده شده با $\frac{103-1}{2} = 51$ از Z در ارتباط است.

ب) چون $82 \in N$ زوج است با $-\frac{82}{2} = -41$ از Z در ارتباط است.

ج) چون $54 \in Z$ مثبت است، داریم:

$$\frac{k-1}{2} = 54 \Rightarrow k = 109$$

پس ۵۴ از Z با ۱۰۹ از N رابطه دارد.

د) چون $-13 \in Z$ منفی است، داریم:

$$-\frac{k}{2} = -13 \Rightarrow k = 26$$

پس -13 از Z با ۲۶ از N رابطه دارد.

به چند قضیه که در مورد مجموعه‌های هم‌ارز موجود است و اثبات آن‌ها فعلاً امکان‌پذیر نیست توجه کنید.

قضیه ۱: به ازای هر مجموعه‌ی غیرتهی مانند A داریم: $A \simeq A$.

قضیه ۲: به ازای هر دو مجموعه‌ی A و B اگر $A \simeq B$ آن‌گاه $B \simeq A$.

قضیه ۳: به ازای هر سه مجموعه‌ی دلخواه A ، B و C اگر داشته باشیم $A \simeq B$ و $B \simeq C$ آن‌گاه $A \simeq C$.

قضیه ۴: اگر A شمارا باشد، هر زیرمجموعه‌ی A نیز شمارا می‌باشد.

قضیه ۵: مجموعه‌ی اعداد گویا شمارا می‌باشد.

قضیه ۶: مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$ نامتناهی و ناشماراست.

قضیه ۷: R شمارا نیست.

قضیه ۸: اجتماع هر دو مجموعه‌ی شمارا مجموعه‌ی شمارا است.

قضیه ۹: اگر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از یک مجموعه، شمارا نباشد، خود آن مجموعه نیز شمارا نیست.

قضیه ۱۰: مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم) شمارا نیست.

عدد اصلی اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، آن گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

توضیح چگونگی برقراری این تساوی چنین است که برای یافتن تعداد اعضای $A \cup B$ ، اگر تعداد اعضاء A را با تعداد اعضای B جمع کنیم، تعداد اعضای $A \cap B$ دوبار محسوب می‌شود که باید یکبار آنرا کم کنیم.

مثال ۱۲۲: در یک کلاس ۳۲ نفره، فوتبال ورزش مورد علاقه‌ی ۲۴ نفر و والیبال ورزش مورد علاقه‌ی ۱۸ نفر می‌باشد. در این کلاس چند نفر هستند که هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند؟

 حل:

فرض کنید تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند $n(F)$ و تعداد کسانی که به والیبال علاقه مند می‌باشند $n(V)$ باشند.

$$\begin{aligned} n(F \cup V) &= n(F) + n(V) - n(F \cap V) \Rightarrow 32 = 24 + 18 - n(F \cap V) \\ \Rightarrow n(F \cap V) &= 10 \end{aligned}$$

مثال ۱۲۳: اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی جدا از هم باشند، نشان دهید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

 حل:

چون $n(A \cap B) = 0$ ، تساوی بالا بدیهی است.

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$$

مثال ۱۲۴: اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، ثابت کنید:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

 حل:

می‌دانیم $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ و $A - B$ و $A \cap B$ دو مجموعه‌ی جدا از هم می‌باشند. (چرا؟) بنابر مثال بالا:

$$n(A) = n[(A - B) \cup (A \cap B)] = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل

مجموعه‌ی A و عمل $*$ را در آن در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی A را نسبت به عمل $*$ بسته گویند، در صورتی که:

$$a, b \in A : a * b \in A$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است، زیرا حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد طبیعی عددی طبیعی است. اما نسبت به اعمال تفریق و تقسیم بسته نیست، زیرا مثلاً:

$$3 \div 2 = 1/2 \notin N \quad \text{و} \quad 5 - 8 = -3 \notin N$$

مثال ۱۲۵: مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبت به کدام یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

 حل:

نسبت به اعمال جمع و تفریق و ضرب بسته است ولی نسبت به عمل تقسیم بسته نیست.

مثال ۱۲۶: آیا مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟ چرا؟

 حل:

خیر، نسبت به عمل تقسیم بسته نیست. زیرا مثلاً حاصل تقسیم عدد ۵ بر صفر عددی گویا نیست.

مثال ۱۲۷: آیا می‌توان گفت مجموعه‌ی $Q - \{0\}$ نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟

 حل:

خیر، زیرا اعداد ۷ و -۷ در مجموعه‌ی $Q - \{0\}$ می‌باشند، ولی:

$$-7 + 7 = 0 \notin Q - \{0\}$$

مثال ۱۲۸: آیا مجموعه‌ی $A = \{2^n \mid n \in Z\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به

عمل جمع چطور؟

حل: 

نسبت به عمل ضرب بسته است، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} 2^x \in A \\ 2^y \in A \end{array} \right\} \Rightarrow 2^x \times 2^y = 2^{x+y} \in A \quad (x+y \in Z)$$

$$2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12 \notin A$$

نسبت به عمل جمع بسته نیست، زیرا:

مثال ۱۳۹: آیا مجموعه‌ی $B = \{3x + 1 \mid x \in Z\}$ نسبت به جمع و ضرب بسته است یا

خیر؟

حل: 

$$B = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$1 + 4 = 5 \notin B$$

نسبت به جمع بسته نیست، زیرا:

نسبت به ضرب بسته است، زیرا:

$$(3x + 1)(3y + 1) = 9xy + 3x + 3y + 1 = 3(3xy + x + y) + 1 = 3k + 1$$

که در آن با توجه به بسته بودن Z نسبت به جمع و ضرب k عددی صحیح است.

تمرین‌های فصل دوم

۱. مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{7} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$C = \{ 5x \mid x \in \mathbb{Z}, -11 < x \}$$

$$D = \{ 7x \mid x \in \mathbb{Z}, -7 < x \leq 9 \}$$

$$E = \{ 6x + 1 \mid x \in \mathbb{Z} \}$$

$$F = \{ x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \}$$

$$G = \{ 3^x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 5 \}$$

$$H = \{ x^3 + 2 \mid x \in \mathbb{Z}, x > -5 \}$$

$$I = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x^2 \leq 25 \}$$

$$j = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{28}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \{ 3^x \times 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5 \} \quad L = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x-1} \in \mathbb{Z} \}$$

$$M = \{ (-1)^x \times 3^x \mid x \in \mathbb{N} \}$$

$$N = \left\{ x \mid x = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$O = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$P = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x+1}{5} \in \mathbb{Z} \right\}$$

۲. مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

$$A = \{-25, -15, -5, \dots, 105\}$$

$$B = \{-1, 4, -9, 16, \dots\}$$

$$C = \{1, 11, 111, \dots\}$$

$$D = \{0, 2, 8, 26, \dots\}$$

$$E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \right\}$$

$$F = \{-7, -2, 3, 8, \dots, 103\}$$

$$G = \left\{ \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots, 128 \right\}$$

$$H = \{-1, 0, 7, 26, \dots\}$$

۱۳. درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر $x \in A$ و $A \in B$ آن‌گاه $x \in B$.

ب) اگر $A \subset B$ و $B \in C$ آن‌گاه $A \in C$.

ج) اگر $A \not\subset B$ و $B \subset C$ آن‌گاه $A \not\subset C$.

د) اگر $x \in A$ و $A \not\subset B$ آن‌گاه $x \notin B$.

۱۴. اگر $A = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ و $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$A \in p(p(B)) \quad A \in p(B)$$

۱۵. اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد که شامل a_1 و a_2 باشند، ولی شامل a_3 نباشند.

۱۶. چند مجموعه مانند X می‌توان یافت که داشته باشیم:

$$\{1, 2, 3, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

۱۷. چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ می‌توان یافت که هریک شامل حداقل یک عدد اول باشد؟

۱۸. در مجموعه‌ی $A = \{250 - 1, 250, 250 + 1, \dots, 450 + 1\}$ چند مجذور کامل وجود دارد؟

۱۹. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k - 1$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $3 - k$ عضوی ۴۸ واحد بیش‌تر است. عدد طبیعی k را به‌دست آورید.

۲۰. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k - 1$ عضوی برابر است با حاصل ضرب تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $k + 5$ عضوی و $3k - 2$ عضوی. مقدار k را حساب کنید.

۲۱. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k + 1$ عضوی از سه برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k - 1$ عضوی ۱۶ واحد بیش‌تر است. مقدار k چه قدر است؟

۲۲. تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی $2k$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی ۹۹۱ زیرمجموعه بیش‌تر است. مقدار k را تعیین کنید.

۲۳. به عضوهای مجموعه‌ی A سه عضو جدید اضافه می‌کنیم تا مجموعه‌ی B به دست آید. اگر تعداد زیرمجموعه‌های محض B ، ۴۴۷، زیرمجموعه بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های A باشد، B چند عضو دارد؟

۲۴. مجموع تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $k + 5$ و $k + 3$ عضو از مجموع تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $k + 2$ و $k + 1$ عضو ۲۱۷۶ زیرمجموعه بیش‌تر است. k را تعیین کنید.

۲۵. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k - 3$ عضو از تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی $k + 2$ عضو ۶۱ واحد کم‌تر است. مقدار k چه قدر است؟

۲۶. مجموعه‌ی A دو عضو بیش‌تر از مجموعه‌ی B دارد. در صورتی که مجموع تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه ۸۰ باشد، تعیین کنید هر کدام چند عضو دارند؟

۲۷. اگر تعداد عضوهای B ، ۳ واحد کم‌تر از تعداد اعضای A بوده و حاصل ضرب تعداد زیرمجموعه‌های A در تعداد زیرمجموعه‌های B برابر ۳۲ باشد، تعداد عضوهای A و B را به دست آورید.

۲۸. یک مجموعه‌ی ۸ عضو چند زیرمجموعه‌ی سه عضو دارد؟ چرا؟

۲۹. یک مجموعه‌ی چهار عضو بنویسید که هر عضو آن زیرمجموعه‌ی آن نیز باشد.

۳۰. اگر $A \subset B$ باشد، ثابت کنید $P(A) \subset P(B)$.

۳۱. همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{2\}, 2, \{2, 2\}\}$ را بنویسید.

۳۲. اگر $B = \{\{5\}, \{5, 5, 5\}\}$ ، $p(p(B))$ را مشخص کنید.

۳۳. اگر $A = \{\{1, 2, 3, \dots, 20\}\}$ ، $p(A)$ چند زیرمجموعه دارد؟

۳۴. اگر $A = \{3k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$ اعضای A و B را بنویسید.

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۵. به ازای چه مقادیری از a و b دو مجموعه‌ی $\{a, a^2\}$ و $\{1, b, b^2\}$ مساویند؟

۳۶. اگر دو مجموعه‌ی $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ مساوی باشند، درباره‌ی a, b, c و d چه می‌توان گفت؟

۳۷. اگر $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset A_1$ ثابت کنید $A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

۳۸. به ازای چه مقادیری از a و b دو مجموعه‌ی A و B مساویند؟

$$A = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$B = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{3, 2\}, \{2, 3, 1, 2\}\}$$

۳۹. اگر دو مجموعه‌ی $A = \{2^x \mid x \in Z\}$ و $B = \{3^y \mid y \in Z\}$ مساوی باشند، مقادیر x و y را حساب کنید.

۴۰. آیا از $A \neq B$ می‌توان نتیجه گرفت $A \not\subset B$ ؟ چرا؟

۴۱. اگر $M = \{x \mid x \in Z, x > -13\}$ و $A = \{x \mid x \in Z, x > -7\}$ باشد، A' را مشخص کنید.

۴۲. اگر $M = \{5k \mid k \in Z\}$ و $B = \{10k \mid k \in Z\}$ باشد، B' را مشخص کنید.

۴۳. اگر $M = \{2^x \mid x \in Z\}$ و $A = \{2^x \mid x \in Z\}$ مجموعه‌ی A' را با اعضا و علائم ریاضی بنویسید.

۴۴. اگر $A = \{\{5, 6\}, \{5, 6, 6\}, \{5, 5, 6\}\}$ باشد $P(P(A))$ را مشخص کنید.

۴۵. اگر $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $A = \{1, 4, 7\}$ و $B = \{2, 3, 7\}$ باشد، حاصل $(A \cup B)'$ و $A' \cap B'$ و $A' \cup B'$ را با اعضایشان مشخص کنید.

۴۶. اگر $A = \{x \mid x \in Z, x > -10\}$ و $B = \{x \mid x \in Z, -2 < x < 30\}$ باشد، $A \cup B$ و $A \cap B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۴۷. اگر $A = \{5, \{7\}, 7\}$ و $B = \{\{5\}, 7, 5\}$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را مشخص کنید.

۴۸. اگر $C = \{x | x < 15\}$ و $D = \{x | x > -17\}$ باشند $A \cup B$ و $A \cap D$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۴۹. کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

الف) $\left\{x \mid x \in Z, \frac{x}{12} \in Z\right\} = \{12x \mid x \in Z\}$

ب) $\left\{x \mid x \in Z, \frac{24}{x} \in Z\right\} = \{24x \mid x \in Z\}$

ج) $\{2x \mid x \in Z\} = \{2x + 6 \mid x \in Z\}$

د) $\{4x - 1 \mid x \in Z\} = \{4x + 3 \mid x \in Z\}$

۵۰. اگر $A = \{3k \mid k \in Z\}$ و $B = \{3k + 1 \mid k \in Z\}$ و Z مجموعه‌ی مرجع باشد، حاصل $(A \cup B)'$ را مشخص کنید.

۵۱. اگر Z مجموعه‌ی مرجع و $A = \{x \mid x \in Z, x > 7\}$ ، $B = \{x \mid x \in Z, x \leq 7\}$ حاصل $A' \cap B'$ را مشخص کنید.

۵۲. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(A \cup A') \cup (B \cap B')$

ب) $(A \cup \emptyset)' \cap (A \cap M)'$

ج) $(A \cup B') \cup (A' \cap B)$

د) $A \cup (A \cap B \cap C)$

۵۳. اگر:

$$A = \{3k - 1 \mid k \in N, 4 \leq k \leq 7\} \text{ و } M = \{3k + 2 \mid k \in N, 1 \leq k \leq 7\}$$

$$C = B' \cap A \text{ و } B = \{14, 17, 20\} \text{ عبارت } (A \cup B)' \cap C' \text{ چیست؟}$$

۵۴. اگر Z مجموعه‌ی مرجع و:

$$A \cup B' = \{x \mid x \in Z, x^2 > 25\}$$

مجموعه‌ی $A' \cap B'$ را با عضوهایش مشخص کنید.

۵۵. اگر $A = \{x | x \in Z, x > 5\}$ و $B = \{x | x \in Z, x < -5\}$ هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهای مشخص کنید ($M = Z$).

الف) $A' \cup B$ ب) $A' \cap B'$

۵۶. اگر:

$A \cap C = \{x | x \in Z, -3 < x < 3\}$ و $A \cap B = \{x | x \in Z, -1 \leq x < 5\}$
حاصل $A \cap (B \cup C)$ کدام است؟

۵۷. اگر $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cup B' = \{a, b, c, f\}$ اعضای مجموعه‌ی A را تعیین کنید.

۵۸. اگر $A = \{x | x \in R, x \geq 3\}$ مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ و $A' \cap B'$ را مشخص کنید.

۵۹. اگر:

$A = \{x | x \in Z, -100 < x < 20\}$ و $B = \{x | x \in Z, -50 < x < 40\}$
 $C = \{x | x \in Z, -10 < x < 50\}$ باشد، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $A \cap B =$ ب) $A \cap C =$
ج) $A \cap B \cap C =$ د) $A \cup B \cup C =$

۶۰. اگر:

$A = \{x | -7 < x < 7\}$ و $B = \{x | -10 < x < 10\}$ و $C = \{x | -15 < x < 15\}$ باشد، مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ و $B \cup C$ و $A \cap B \cap C$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۶۱. اگر N مجموعه‌ی مرجع:

$A' = \{x | x \in N, x < 10\}$ و $B' = \{x | x \in N, x < 15\}$ باشد، $A \cup B$ و $A \cap B$ را مشخص کنید.

۶۲. اگر $A \cup B = \{x | -9 < x < 11\}$ و $A \cup C = \{x | -12 < x < 8\}$ باشد، حاصل $A \cup (B \cap C)$ را تعیین کنید.

۶۳. اگر $B \cap C = \emptyset$ حاصل $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ چیست؟

۶۴. اگر $B - C = B'$ ثابت کنید $(B \cap C') \cup (B' \cap C) = B'$.

۶۵. اگر A, B و C سه مجموعه باشند و $B \subset A$ و $A \cap C = \emptyset$ ، حاصل $(B' \cap A') \cup C$ چیست؟

۶۶. اگر A و B جدا از هم باشند، حاصل $(A' \cup B) \cap A$ چیست؟

۶۷. اگر $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, c, d\}$ و بدانیم $a \notin A - B$ و $e \notin B - A$ مجموعه‌های A و B را مشخص کنید.

۶۸. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \emptyset$

ب) $(C \cap D) \cup C' = D \cup C'$

ج) $(A \cap B') \cap (A' \cup B) = \emptyset$

د) $B \cup (A \cup B')' = B$

۶۹. اگر $A = \{x | x \in Z, x < -9\}$ و $B = \{x | x \in Z, x < -14\}$ باشد $A - B$ و $B - A$ را مشخص کنید.

۷۰. اگر:

$M = \{\emptyset, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$ و $A = \{\{3, 4, 5\}, \emptyset\}$ و $B = \{\{3, 4\}, \emptyset\}$ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $A - (B \cap A') =$ ب) $(B - A)' =$

ج) $A - (B - A) =$ د) $A' \cup [(B - A) - A] =$

۷۱. اگر:

$A \cap B = \{x, y\}$ و $A - B = \{z, t\}$ و $B - A = \{v, u\}$

مجموعه‌ی $A \cup B$ برابر چه مجموعه‌هایی می‌تواند باشد؟

۷۲. اگر $A_n = \left\{ x \mid x \in R, \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ ، طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

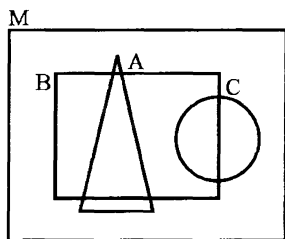
الف) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i =$

ب) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i =$

ج) $(A_1 \cup A_8) \cup A_9 =$

د) $(A_1 - A_5) - A_7 =$

۷۳. پنج مجموعه‌ی نامتناهی نام ببرید که دو به دو جدا از هم بوده و اجتماعشان برابر Z شود.



۷۴. در شکل زیر $(A' \cap C) - B$ را سایه بزنید.

۷۵. اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم $[A - (A - B)] \cup [A - (B - A)]$ را به دست آورید.

۷۶. اگر A و B دو مجموعه باشند متمم $(B' - A) \cup (A' - B)$ چیست؟

۷۷. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ب) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

ج) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

د) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

هـ) $(B \cup C) - (C \cup D) = (B - C) - D$

و) $(A \cap B) - (A \cap B') = A \cap B$

ز) $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) = C$

ح) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

ط) $A' - B = B' - A$

ی) $(A' - B) \cup (B' \cup A)' = A'$

ک) $(A' \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B) = B - A$

۷۸. طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید:

الف) $(A \cap B \cap C) \cup (A - C) \cup (A \cap B') =$

ب) $[A \cup (A \cap B)]' \cap [B \cap (B \cup A)]' \cap [(A \cup A) - A] =$

ج) $[(A \cap M) \cup (A \cap B')] \cap [(A' \cap M) \cup (A' \cap B)] =$

د) $(A - B) \cap (B - A) =$

هـ) $[(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)] =$

و) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] =$

ز) $[(A' - M)' - A]' =$

ح) $[(\emptyset - A)' \cap (A - \emptyset)'] - [(\emptyset \cup A') - (A' \cap \emptyset)'] =$

ط) $[(A \cup M')' \cap A]' - [(A \cap M')' - A'] =$

ی) $(A - B) \cup [B \cap (A \cup B)] =$

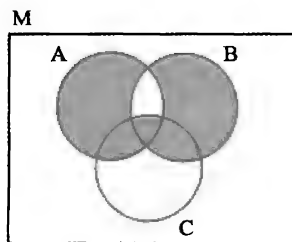
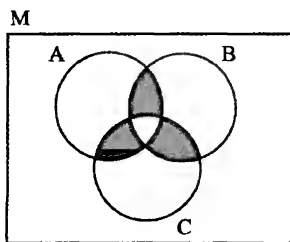
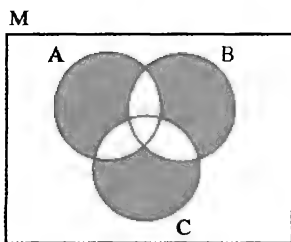
۷۹. اگر $A_1 = \{0, 2\}$ و $A_2 = \{1, 3\}$ و $A_3 = \{0, 2, 4\}$ و $A_4 = \{1, 3, 5\}$ و ...:

اولاً: A_1, A_2, A_3, \dots را با اعضا مشخص کنید.

ثانیاً: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{111} = ?$ و $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{111} = ?$

ثالثاً: مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن به A_5 تعلق داشته ولی به A_6 تعلق نداشته باشد.

۸۰. در هر یک از شکل‌های زیر، مجموعه‌ای را که نمودار آن سایه زده شده بنویسید.



۸۱. ثابت کنید اگر $A \subset B \subset C$ آن‌گاه $A \cup B = B \cap C$.

۸۲. ثابت کنید اگر $A - B = A$ آن گاه $B - A = B$.

۸۳. اگر $A \cup B = A - B$ ثابت کنید $B = \emptyset$.

۸۴. اگر $A \cap B = \emptyset$ نشان دهید $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

۸۵. اگر $A \cup B = A \cap B$ ثابت کنید $A = B$.

۸۶. اگر $A \subset B$ و $A \subset B'$ ثابت کنید $A = \emptyset$.

۸۷. برای سه مجموعه A ، B و C ثابت کنید:

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$$

۸۸. اگر مجموعه‌های A ، B و C دو به دو جدا از هم باشند حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$[(A \cup B) \cap C] \cap [(A \cup C) \cap B] \cap [(B \cup C) \cap A]$$

۸۹. از $A \cap B = A \cap C$ و $B - A = C - A$ نتیجه بگیرید: $B = C$.

۹۰. از $A \cup B = C$ و $A \cap B = \emptyset$ نتیجه بگیرید: $A = C - B$.

۹۱. با استفاده از قوانین مجموعه‌ها درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ب) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ج) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

د) $(A - B) - C = (A - C) \cap (A - B)$

هـ) $[(A - B) \cup (B - A)] \cap (A \cap B) = \emptyset$

و) $A \Delta (A \cap B) = A - B$

۹۲. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $\left[\left[(M - A')' - A' \right]' - A \right]' - \emptyset'$

ب) $[[(\emptyset' - A)' - (M' \cup A)']' - [(M' \cup A)' \cup (\emptyset' \cap A')']']'$

۹۳. اگر $A \Delta B = \emptyset$ ثابت کنید $A = B$.

۹۴. ثابت کنید:

الف) $(A \Delta B) \cap A = A - B$

ب) $(A \Delta B) \cup A = A \cup B$

۹۵. درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

الف) $A \Delta (A \Delta B) = B$

ب) $A \cup B = M \Leftrightarrow A \Delta B = A' \cup B'$

ج) $A \cap B = M \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$

د) $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$

۹۶. اگر $A_n = \left\{ x \mid n \in N, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right\}$ ، حاصل عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

ب) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

۹۷. ۲۵ نفر از دانش آموزان یک کلاس در امتحان فیزیک و ۳۱ نفر در امتحان شیمی قبول شده‌اند. اگر ۴۲ نفر در فیزیک یا شیمی قبول شده باشند، چند نفر در هر دو امتحان قبول شده‌اند؟

۹۸. در یک کلاس ۳۰ نفری همه‌ی دانش آموزان فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند. اگر ۱۲ نفر والیبال و ۸ نفر فوتبال و والیبال بازی کنند، چند نفر فوتبال بازی می‌کنند؟ چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۹۹. اگر A ، B و C سه مجموعه‌ی متناهی باشند، ثابت کنید:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

۱۰۰. در یک کلاس ۳۴ نفره، ۲ نفر از دانش آموزان به هیچ‌یک از رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال علاقه ندارند. ۱۵ نفر به فوتبال، ۱۸ نفر به والیبال، ۱۶ نفر به بسکتبال، ۷ نفر به فوتبال و والیبال، ۸ نفر به والیبال و بسکتبال و ۴ نفر به فوتبال و بسکتبال علاقه‌مند هستند. تعداد دانش آموزانی را مشخص کنید که:

الف) به هر سه رشته علاقه دارند. ب) فقط به فوتبال علاقه دارند.

ج) فقط به والیبال علاقه دارند. د) فقط به بسکتبال علاقه دارند.

ه) به فوتبال علاقه دارند ولی به والیبال علاقه ندارند.

و) به والیبال علاقه دارند ولی به بسکتبال علاقه ندارند.

ز) فقط به یک رشته‌ی ورزشی علاقه دارند.

ح) به حداقل دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند.

۱۰۱. یک کارخانه‌ی سازنده‌ی خودرو قبل از تحویل خودرو به مشتریان تعداد ۱۰۰ نمونه از

آن را به طور تصادفی انتخاب کرده و مورد بازدید فنی قرار داده است. در این بررسی

ملاحظه گردید ۴۲ خودرو فاقد نقص فنی، ۲۳ خودرو دارای نقص فرمان، ۲۶ خودرو نقص

چراغ، ۳۲ خودرو نقص موتور، ۹ خودرو نقص فرمان و چراغ، ۱۰ خودرو نقص فرمان و

موتور و ۱۲ خودرو نقص چراغ و موتور دارند.

اولاً: تعداد خودروهایی که هر سه نقص را دارند مشخص کنید.

ثانیاً: تعداد خودروهایی را که فقط یک نقص دارند بیابید.

۱۰۲. در مورد بسته بودن هر یک از مجموعه‌های زیر نسبت به اعمال جمع و ضرب تحقیق کنید.

$$A = \{5x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{-2a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \{4, 9, 14, 19, \dots\}$$

$$E = \{5, 25, 125, \dots\}$$

$$F = \{2^{2x-1} \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$G = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q} - \{0\}\}$$

$$H = \{\sqrt{2}x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$J = \{a\sqrt{2} + b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

۱۰۳. یک مجموعه‌ی تک عضوی بسازید که نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته باشد.

۱۰۴. یک مجموعه‌ی دو عضوی بسازید که نسبت به ضرب و تقسیم بسته باشد ولی نسبت به

جمع و تفریق بسته نباشد.

۱۰۵. چه عضوی را به مجموعه‌ی $A = \{\dots, -4, -2, 2, 4, \dots\}$ اضافه کنیم تا مجموعه‌ی

حاصل نسبت به جمع بسته باشد؟ آیا A نسبت به ضرب بسته است؟

۱۰۶. آیا مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 1\}$ نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است؟ نسبت به

تفریق و تقسیم چه طور؟

👉 فصل سوم

توان

مفهوم توان و قوانین محاسبه‌ی توان‌ها را در دوره‌ی راهنمایی فرا گرفته‌اید. در این فصل ضمن یادآوری، به تکمیل آن می‌پردازیم:

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ بار}} \quad (m \in \mathbb{N})$$

قوانین محاسبه‌ی اعداد توان‌دار

۱- در ضرب اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها مساوی و نماها مختلف باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و نماها را با هم جمع می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \times a^n = \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{m \text{ بار}} \times \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{n \text{ بار}} = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m+n \text{ بار}} = a^{m+n}$$

۲- در ضرب اعداد توان‌دار اگر نماها مساوی و پایه‌ها مختلف باشند، یکی از نماها را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$a^m \times b^m = \underbrace{(a \times a \times a \times \dots \times a)}_{m \text{ بار}} \times \underbrace{(b \times b \times b \times \dots \times b)}_{m \text{ بار}} =$$

$$\underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b)}_{m \text{ بار}} = (a \times b)^m$$

۳- در ضرب اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها و نماها مساوی باشند، به یکی از دو روش قبل عمل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} a^m \times a^m &= a^{m+m} = a^{2m} \\ a^m \times a^m &= (a \times a)^m = (a^2)^m \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a^2)^m = a^{2m}$$

۴- در تقسیم اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها مساوی و نماها مختلف باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و نماها را از هم کم می‌کنیم.

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m > n)}$$

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ بار}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n} = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{m-n} = a^{m-n}$$

۵- در تقسیم اعداد توان‌دار اگر نماها مساوی و پایه‌ها مختلف باشند یکی از نماها را نوشته و پایه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم.

$$\boxed{a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ بار}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_m} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{a}{b}\right) \times \dots \times \left(\frac{a}{b}\right)}_{m \text{ بار}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۶- در تقسیم اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها و نماها مساوی باشند، به یکی از دو روش قبل عمل می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} a^m \div a^m &= a^{m-m} = a^0 \\ a^m \div a^m &= \left(\frac{a}{a}\right)^m = 1^m = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a^0 = 1} \quad (a \neq 0)$$

مثال ۱: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $(2/5)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3$

ب) $3^7 \times 3 \times 3^4$

ج) $8^{11} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{11}$

د) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \times 6^8 \times 2^8$

هـ) $(0/75)^{10} \div \left(\frac{3}{4}\right)^7$

و) $\left[12^9 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9\right] \div 6^9$

ز) $10^{17} \div (0/5)^{17}$

ح) $7^{10} \div \left(2\frac{1}{3}\right)^{10}$

ط) $\frac{5^7 \times 5^3}{5^6 \times 5}$

ی) $\frac{(8^7 \times 3^7) \div 24^2}{(2^3 \div 0/25^3) \times 3^3}$

ک) $5^7 \times 6^5 \times 12^7 \times 10^5$

ل) $\frac{12^2 \times 3^3}{3^{10} \times 12^5}$

حل: 

الف) $(2/5)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = (2/5)^{10}$

ب) $3^7 \times 3 \times 3^4 = 3^{12}$

ج) $8^{11} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{11} = \left(8 \times \frac{5}{8}\right)^{11} = 5^{11}$

د) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \times 6^8 \times 2^8 = \left(\frac{2}{3} \times 6 \times 2\right)^8 = 8^8$

هـ) $(0/75)^{10} \div \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

و) $\left[12^9 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9\right] \div 6^9 = \left(12 \times \frac{3}{2}\right)^9 \div 6^9 = 18^9 \div 6^9 = 3^9$

$$ز) ۱۰^{۱۷} \div (۰/۵)^{۱۷} = (۱۰ \div ۰/۵)^{۱۷} = ۲۰^{۱۷}$$

$$ح) ۷^{۱۰} \div \left(۲\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰} = \left(۷ \div \frac{۲}{۳}\right)^{۱۰} = \left(۷ \times \frac{۳}{۲}\right)^{۱۰} = ۳^{۱۰}$$

$$ط) \frac{۵^۷ \times ۵^۳}{۵^۶ \times ۵} = \frac{۵^{۱۰}}{۵^۷} = ۵^۳$$

$$ی) \frac{(۸^۷ \times ۳^۷) \div ۲۴^۲}{(۲^۳ \div ۰/۲۵^۳) \times ۳^۳} = \frac{۲۴^۷ \div ۲۴^۲}{۸^۳ \times ۳^۳} = \frac{۲۴^۵}{۲۴^۳} = ۲۴^۲$$

$$ک) ۵^۷ \times ۶^۵ \times ۱۲^۷ \times ۱۰^۵ = (۵ \times ۱۲)^۷ \times (۶ \times ۱۰)^۵ = ۶۰^۷ \times ۶۰^۵ = ۶۰^{۱۲}$$

$$ل) \frac{۱۲^{۱۲} \times ۳^۳}{۳^{۱۰} \times ۱۲^۵} = \frac{۱۲^۷}{۳^۷} = ۴^۷$$

نکته: اگر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی و اگر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت است.

$$\boxed{(-a)^{۲k} = a^{۲k}}$$

$$\boxed{(-a)^{۲k+۱} = -a^{۲k+۱}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(-۱)^{۰۰} = ۱ \quad (-۱)^{۰۱} = -۱$$

مثال ۲: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\text{الف) } (-۵)^{۱۰} \times ۵^۶ \quad \text{ب) } \frac{(-۵)^{۱۱} \times ۵^۴}{۵^۳ \times (-۵)^۷}$$

حل: 

$$\text{الف) } (-۵)^{۱۰} \times ۵^۶ = ۵^{۱۰} \times ۵^۶ = ۵^{۱۶}$$

$$\frac{(-۵)^{۱۱} \times ۵^۴}{۵^۳ \times (-۵)^۷} = \frac{-۵^{۱۱} \times ۵^۴}{۵^۳ \times (-۵)^۷} = \frac{-۵^{۱۵}}{-۵^{۱۰}} = ۵^۵$$

۷- توان یک توان

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \dots \times a^m}_{n \text{ بار}} = \overbrace{a^{m+m+m+\dots+m}}^n = a^{mn}$$

مثال ۳ :

الف) $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

ب) $\left[(2/5)^2 \right]^3 = (2/5)^{3 \times 2} = (2/5)^6$

ج) $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^6 = 1$

د) $25^5 = (5^2)^5 = 5^{10}$

مثال ۴ : حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $16^7 \times 8^5$

ب) $25^{11} \div 125^2$

ج) $\frac{27^2 \times 9^5}{81^3 \times 3^2}$

د) $\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^7 \times 2^{20}}{4^3 \times 8^2}$

هـ) $\frac{\left(\frac{2}{5} \right)^7 \times \left(\frac{4}{25} \right)^4}{\left(\frac{8}{125} \right)^2 \times \left(\frac{4}{10} \right)^4}$

و) $\frac{16^7 \times 125^2}{25^3 \times 32^4}$

حل: 

الف) $16^7 \times 8^5 = (2^4)^7 \times (2^3)^5 = 2^{28} \times 2^{15} = 2^{43}$

ب) $25^{11} \div 125^2 = (5^2)^{11} \div (5^3)^2 = 5^{22} \div 5^6 = 5^{16}$

ج) $\frac{27^2 \times 9^5}{81^3 \times 3^2} = \frac{(3^3)^2 \times (3^2)^5}{(3^4)^3 \times 3^2} = \frac{3^6 \times 3^{10}}{3^{12} \times 3^2} = \frac{3^{16}}{3^{14}} = 3^2$

$$\text{د) } \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 \times 2^{20}}{4^3 \times 8^2} = \frac{\frac{1}{2^7} \times 2^{20}}{(2^2)^3 \times (2^3)^2} = \frac{2^{13}}{2^6 \times 2^6} = \frac{2^{13}}{2^{12}} = 2$$

$$\text{هـ) } \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{4}{25}\right)^4}{\left(\frac{8}{125}\right)^2 \times \left(\frac{4}{10}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^4}{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8}{\left(\frac{2}{5}\right)^6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{15}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{10}} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

$$\text{و) } \frac{16^7 \times 125^2}{25^3 \times 32^4} = \frac{(2^4)^7 \times (5^3)^2}{(5^2)^3 \times (2^5)^4} = \frac{2^{28} \times 5^6}{5^6 \times 2^{20}} = \frac{2^{28}}{2^{20}} = 2^8$$

مثال ۵ : حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.


الف) $5^{12} \times 2^{18}$

ب) $2^{22} \times 3^{33}$

 حل:

الف) $5^{12} \times 2^{18} = (5^2)^6 \times (2^3)^6 = 25^6 \times 8^6 = 200^6$

ب) $2^{22} \times 3^{33} = (2^2)^{11} \times (3^3)^{11} = 4^{11} \times 27^{11} = 108^{11}$

 نکته:

$$(a^m)^n \neq a^{m^n}$$


مثال ۶ :

الف) $(10^2)^3 = 10^6$

ب) $10^{2^3} = 10^8$

ج) $\left[(10^2)^3\right]^2 = 10^{2 \times 3 \times 2} = 10^{12}$

د) $10^{2^{3^2}} = 10^{2^9} = 10^{512}$

 نکته: می دانیم $(a^m)^n = (a^n)^m$ ولی $a^{m^n} \neq a^{n^m}$.


مثال ۷: اگر $5^a = 10$ حاصل عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) 5^{a+1}

ب) 5^{a-1}

ج) 125^a

د) 25^{a-1}

حل: 

الف) $5^{a+1} = 5^a \times 5 = 10 \times 5 = 50$

ب) $5^{a-1} = 5^a \div 5 = 10 \div 5 = 2$

ج) $125^a = (5^3)^a = (5^a)^3 = 10^3 = 1000$

د) $25^{a-1} = 25^a \div 25 = (5^2)^a \div 25 = (5^a)^2 \div 25 = 10^2 \div 25 = 4$

۸-توان منفی:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$$

فرض کنیم m عددی مثبت باشد:

$$\left. \begin{aligned} a^0 \div a^m &= a^{-m} = a^{-m} \\ a^0 \div a^m &= 1 \div a^m = \frac{1}{a^m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

مثال ۸:

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8}$

ج) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

د) $(-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^1} = -1$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

-۹

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

مثال ۹ : حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-7} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{25}\right)^4$ ب) $(0/2)^3 \times 125^2$

ج) $\frac{(0/25)^{-2} \times 8^4}{(0/125)^3 \times 2^{-1}}$ د) $\frac{(0/04)^2 \times 625^{-2}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \times (0/008)^3}$


حل: 

الف) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-7} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{25}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8 = \left(\frac{5}{2}\right)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^{-8}$
 $= \left(\frac{5}{2}\right)^2$

ب) $(0/2)^3 \times 125^2 = 5^{-3} \times (5^3)^2 = 5^{-3} \times 5^6 = 5^3$

ج) $\frac{(0/25)^{-2} \times 8^4}{(0/125)^3 \times 2^{-1}} = \frac{2^2 \times 8^4}{5^{-3} \times 2^{-1}} = \frac{2^4 \times 2^{12}}{2^{-9} \times 2^{-1}} = \frac{2^{16}}{2^{-10}} = 2^{16-(-10)} = 2^{26}$

د) $\frac{(0/04)^2 \times 625^{-2}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \times (0/008)^3} = \frac{25^{-2} \times 625^{-2}}{5^4 \times 125^{-3}} = \frac{5^{-6} \times 5^{-12}}{5^4 \times 5^{-6}} = \frac{5^{-12}}{5^4} = 5^{-16}$

نکته: 

$$\frac{a^m}{b^n} = a^m \div b^n = a^m \times b^{-n}$$

مثال ۱۰ :

الف) $10^5 \div 2^{-5} = 10^5 \times 2^5 = 20^5$

ب) $\frac{2^7 \div 3^2}{3^{-2} \div 2^{-3}} = \frac{2^7 \times 3^{-2}}{3^{-2} \times 2^3} = \frac{2^7}{2^3} = 2^4$

۱۰- جمع و تفریق‌ها:

مثال ۱۱: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

(الف) $۲^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰}$

(ب) $۲۷^{۱۱} + ۲۷^{۱۱} + ۲۷^{۱۱}$

(ج) $۱۵ \times ۵^{۲۰} + ۱۰ \times ۵^{۲۰}$

(د) $۷^{۲۰} + ۴۲ \times ۷^{۱۹}$

(هـ) $۱۰ \times ۲^{۱۷} + ۱۲ \times ۲^{۱۶} + ۳ \times ۲^{۲۱}$

(و) $\frac{۱۱ \times ۹^{-۵} - ۸ \times ۹^{-۵}}{۴ \times ۳^{-۷} + ۵ \times ۳^{-۷}}$

حل 

(الف) $۲^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰} = ۲ \times ۲^{۱۰۰} = ۲^{۱۰۱}$

(ب) $۲۷^{۱۱} + ۲۷^{۱۱} + ۲۷^{۱۱} = ۳ \times ۲۷^{۱۱} = ۳ \times ۳^{۳۳} = ۳^{۳۴}$

(ج) $۱۵ \times ۵^{۲۰} + ۱۰ \times ۵^{۲۰} = ۲۵ \times ۵^{۲۰} = ۵^۲ \times ۵^{۲۰} = ۵^{۲۲}$

(د) $۷^{۲۰} + ۴۲ \times ۷^{۱۹} = ۷^{۲۰} + ۶ \times ۷ \times ۷^{۱۹} = ۷^{۲۰} + ۶ \times ۷^{۲۰} = ۷ \times ۷^{۲۰} = ۷^{۲۱}$

(هـ) $۱۰ \times ۲^{۱۷} + ۱۲ \times ۲^{۱۶} + ۳ \times ۲^{۲۱} = ۵ \times ۲^{۱۸} + ۳ \times ۲^۲ \times ۲^{۱۶} + ۳ \times ۲^۳ \times ۲^{۱۸}$

$$= ۵ \times ۲^{۱۸} + ۳ \times ۲^{۱۸} + ۲۴ \times ۲^{۱۶} = ۳۲ \times ۲^{۱۸} = ۲^۵ \times ۲^{۱۸} = ۲^{۲۳}$$

(و) $\frac{۱۱ \times ۹^{-۵} - ۸ \times ۹^{-۵}}{۴ \times ۳^{-۷} + ۵ \times ۳^{-۷}} = \frac{۳ \times ۹^{-۵}}{۹ \times ۳^{-۷}} = \frac{۳^{-۹}}{۳^{-۵}} = ۳^{-۴}$

۱۱- معادلات توانی:

هر معادله‌ای که مجهول آن در نما قرار گرفته باشد، معادله‌ی توانی نامیده می‌شود. برای حل معادلات توانی ابتدا پایه‌ها را در دو طرف تساوی یکسان می‌کنیم، سپس از این خاصیت استفاده می‌کنیم که «از دو توان مساوی که پایه‌هایشان برابرند، الزاماً نماهایشان نیز برابرند.» (در صورتی که پایه‌ها ۰ یا -۱ یا +۱ نباشند).

مثال ۱۲: معادلات توانی زیر را حل کنید.

(الف) $۵^{۲x-۶} = ۱$

$$۵^{۲x-۶} = ۵^۰ \Rightarrow ۲x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow \boxed{x = ۳}$$

(ب) $۳^{۲x-۱} = ۲۷$

$$۳^{۲x-۱} = ۳^۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow \boxed{x = ۲}$$

(ج) $۳^{x-۱} = ۵^{۲x-۲}$

هیچ توانی از ۲ با هیچ توانی از ۵ برابر نیست جز توان صفر

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ 2x-2=0 \rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

د) $(0/2)^{1-x} = 125$

$$5^{x-1} = 5^3 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

هـ) $3^x + 3^{x+1} = 36$

$$3^x + 3 \times 3^x = 36 \Rightarrow 4 \times 3^x = 36 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

و) $\frac{27^x \times 9^{x-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \times 6^x} = 2^{-x}$

$$\frac{3^{3x} \times 3^{2x-4}}{3^{x-1} \times 2^x \times 3^x} = 2^{-x} \Rightarrow \frac{3^{5x-4}}{3^{2x-1} \times 2^x} = 2^{-x} \Rightarrow 3^{5x-4} = 3^{2x-1} \times 2^0 \Rightarrow$$

$$5x-4=2x-1 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

ز) $\frac{25^x + 5^{2x-1}}{9^{x-1} + 3^{2x-1}} = \frac{15}{2}$

$$\frac{5^{2x} + 5^{2x-1}}{3^{2x-2} + 3^{2x-1}} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x} \left(1 + \frac{1}{5}\right)}{3^{2x} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x} \times \frac{6}{5}}{3^{2x} \times \frac{4}{9}} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5^{2x}}{3^{2x}} \times \frac{6 \times 9}{5 \times 4} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x}}{3^{2x}} \times \frac{27}{10} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(5^2)^x}{(3^2)^x} = \frac{15}{2} \times \frac{10}{27} \Rightarrow \frac{25^x}{9^x} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{25}{9}\right)^x = \frac{25}{9} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

مثال ۱۳: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۳ + k عضوی ۱۱۲ واحد از تعداد

زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی بیش‌تر است. عدد طبیعی k را به‌دست

آورید.

حل: 

$$2^k + 3 = 2^k + 112$$

$$2^k + 3 - 2^k = 112 \Rightarrow 2^k (2^3 - 1) = 112 \Rightarrow 2^k \times 7 = 112$$

$$\Rightarrow 2^k = 16 \Rightarrow 2^k = 2^4 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

مثال ۱۴: مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه مجموعه‌ی $2 - k$ عضو و $k + 1$ عضو

عضوی برابر ۱۰۴ است. تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه چقدر است؟

حل: 

$$2^{k-2} + 2^k + 2^{k+1} = 104$$

$$2^k (2^{-2} + 1 + 2) = 104 \Rightarrow 2^k \left(\frac{1}{4} + 3 \right) = 104$$

$$\Rightarrow 2^k \times \frac{13}{4} = 104 \Rightarrow 2^k = 104 \times \frac{4}{13} \Rightarrow 2^k = 32$$

$$\Rightarrow 2^k = 2^5 \Rightarrow \boxed{k = 5}$$

$$2^{k-2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$$

$$2^k = 2^5 = 32$$

$$2^{k+1} = 2^{5+1} = 2^6 = 64$$

تجزیه‌ی اعداد طبیعی به عوامل اول

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک یا اول است و یا مرکب که آن را می‌توان به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. اگر اعداد اول مانند p_1 و p_2 و ... و p_n بتوان یافت به طوری که $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ می‌گوییم عدد n به ضرب عوامل اول تجزیه شده است.

☆ قضیه‌ی بنیادی حساب

هر عدد طبیعی $n > 1$ را می‌توان به عوامل اول تجزیه کرد و این تجزیه بدون در نظر گرفتن ترتیب قرار گرفتن عوامل منحصر به فرد است.

لازم به ذکر است که اگر p عددی اول باشد در این صورت خود p تجزیه‌ی p به عوامل اول است.

مثال ۱۵:

$$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$۱۷ = ۱۷$$

$$۷۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$$

اگر در تجزیه‌ی اعداد چند عامل مساوی هم وجود داشته باشد، آن‌ها را به صورت توانی می‌نویسیم:

$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$$

نتیجه: هر عدد طبیعی $n > ۱$ را به طور منحصر به فردی می‌توان به صورت

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$$

نشان داد که در آن a_i ها طبیعی و p_i ها اعداد اول متمایزی هستند به طوری که:

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n$$

که در این صورت عبارت $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$ را تجزیه‌ی استاندارد n به حاصل ضرب عوامل اول می‌نامند. در این بخش هر جا صحبت از تجزیه است منظورمان تجزیه استاندارد می‌باشد.

مثال ۱۶: اعداد ۲۴۰ و ۱۲۰۰ را تجزیه کنید.

حل: 


۲۴۰	۲	۲۴۰ = ۲ ^۴ × ۳ × ۵	۱۲۰۰	۲	۱۲۰۰ = ۲ ^۴ × ۳ × ۵ ^۲
	۵			۵	
۲۴	۲			۲	
۱۲	۲		۱۲	۲	
۶	۲		۶	۲	
۳	۳		۳	۳	
۱			۱		

مثال ۱۷: تجزیه‌ی استاندارد عدد $۱۴۴^۷ \times ۱۵۰^۳$ را بنویسید.

حل: 


$$۱۴۴^۷ \times ۱۵۰^۳ = (۲^۴ \times ۳^۲)^۷ \times (۲ \times ۳ \times ۵^۲)^۳ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۱۴} \times ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۶ = ۲^{۳۱} \times ۳^{۱۷} \times ۵^۶$$

تعریف: یک عدد طبیعی را مجذور کامل (مربع کامل) گوییم، در صورتی که در تجزیه‌ی آن به حاصل ضرب‌های عامل‌های اول تمام نماها زوج باشند و آن را مکعب کامل گوییم در صورتی که در تجزیه‌ی آن به حاصل ضرب عامل‌های اول تمام نماها مضربی از ۳ باشند.

مثال ۱۸: کوچک‌ترین عددی که در عدد ۱۴۰۰ ضرب شود و آن را مجذور کامل کند چیست؟
 **حل:**

تجزیه‌ی ۱۴۰۰ به حاصل ضرب عامل‌های اول عبارت است از:

$$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$$
 با توجه به این که توان عامل‌های ۲ و ۷ فردند این عدد را باید در $2 \times 7 = 14$ ضرب کنیم تا مجذور کامل شود.

مثال ۱۹: کوچک‌ترین عدد طبیعی که باید در ۱۰۸۰ ضرب شود تا آن را به یک عدد مکعب کامل تبدیل کند چیست؟
 **حل:**

تجزیه‌ی ۱۰۸۰ به حاصل ضرب عامل‌های اول عبارت است از:

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$
 با توجه به این که توان عامل ۵ یک است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست، این عدد را باید در $5^2 = 25$ ضرب کرد.

☆ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که آن را با نماد (a, b) نشان می‌دهیم، در واقع بزرگ‌ترین عددی است که a و b بر آن بخش‌پذیرند.

❖ **تذکره:** در این قسمت هر جا صحبت از a و b است دو عدد طبیعی مورد نظر می‌باشند.

☆ محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد به کمک تجزیه

در این روش ابتدا اعداد را تجزیه می‌کنیم. سپس از میان عامل‌های مشترک آن توانی را انتخاب می‌کنیم که نمایش کوچک‌تر است. حاصل ضرب این عامل‌ها ب.م.م دو عدد است. اگر در تجزیه‌ی اعداد عامل مشترکی وجود نداشته باشد ب.م.م اعداد یک است.

مثال ۲۰: ب. م. م دو عدد ۷۲۰ و ۲۱۰۰ را حساب کنید.

 حل:

$$۷۲۰ = ۲^4 \times 3^2 \times 5$$

$$۲۱۰۰ = ۲^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$


$$(۷۲۰, ۲۱۰۰) = ۲^2 \times 3 \times 5 = ۶۰$$


☆ دو عدد متباین (نسبت به هم اول)

دو عدد را که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان یک باشد، دو عدد متباین می‌نامند. به عنوان مثال دو عدد ۷ و ۹ و دو عدد ۸ و ۱۵ متباینند، زیرا:

$$(۷, ۹) = ۱ \text{ و } (۸, ۱۵) = ۱$$

 نکته: هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اولند.

 نکته: هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اولند.

 نکته: اگر a و b دو عدد متباین و m و n دو عدد طبیعی باشند، همواره a^m و b^n نسبت به هم اولند.

☆ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b که آن‌را با نماد $[a, b]$ نشان می‌دهیم، در واقع کوچک‌ترین عدد طبیعی است که بر دو عدد a و b بخش‌پذیر است.

☆ محاسبه‌ی ک. م. م دو عدد به کمک تجزیه

در این روش ابتدا اعداد را تجزیه می‌کنیم، سپس از میان عامل‌های مشترک آن توانی که نمایش بزرگ‌تر است و همچنین عامل‌های غیرمشترک را انتخاب کرده در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۲۱: ک. م. م دو عدد ۱۲۰ و ۷۲ را حساب کنید.

 حل:

$$۱۲۰ = ۲^3 \times 3 \times 5$$

$$۷۲ = ۲^3 \times 3^2$$

$$[۱۲۰, ۷۲] = ۲^3 \times 3^2 \times 5 = ۳۶۰$$

نکته: اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند ک. م. م آن‌ها برابر حاصل‌ضربشان است.

نکته: اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$(a, b) = b \quad \text{و} \quad [a, b] = a$$

مثال ۲۲: ب. م. م و ک. م. م سه عدد ۷۹۲ و ۱۲۰۰ و ۱۱۲۰ را به کمک تجزیه حساب کنید.

حل:

$$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$$

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

$$1120 = 2^5 \times 5 \times 7$$

$$(792, 1200, 1120) = 2^3 = 8$$

$$[792, 1200, 1120] = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 554400$$

مثال ۲۳: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو عدد $M = 18^4 \times 125^{a-5}$ و $N = 9^{b-2} \times 25^2$ نسبت به هم اول باشند.

حل:

$$M = 18^4 \times 125^{a-5} = 2^4 \times 3^8 \times 5^{3a-15}$$

$$N = 9^{b-2} \times 25^2 = 3^{2b-4} \times 5^4$$

برای این که M و N نسبت به هم اول باشند، باید در M عامل ۵ و در N عامل ۳ را حذف کنیم که در این صورت باید داشته باشیم:

$$3a - 15 = 0 \rightarrow \boxed{a = 5} \quad \text{و} \quad 2b - 4 = 0 \rightarrow \boxed{b = 2}$$

مثال ۲۴: اگر $M = 4^5 \times 15^3$ و $N = 16^2 \times 45^3$ و $P = 12^5 \times 25$ باشند:

اولاً: M و N و P را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

ثانیاً: حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

$$(M, N) \quad [N, P] \quad [M, (N, P)] \quad (M, [N, P])$$

$$\frac{[M, N]}{(N, P)} \quad (M, MP) \quad [N, NP]$$

حل: 

اولاً:

$$M = 4^5 \times 15^3 = (2^2)^5 \times (3 \times 5)^3 = 2^{10} \times 3^3 \times 5^3$$

$$N = 16^2 \times 45^2 = (2^4)^2 \times (3^2 \times 5)^2 = 2^8 \times 3^2 \times 5^2$$

$$P = 12^5 \times 25 = (2^2 \times 3)^5 \times 5^2 = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2$$

ثانیاً:

$$(M, N) = 2^8 \times 3^2 \times 5^2$$

$$[N, P] = 2^{10} \times 3^5 \times 5^3$$

$$[M, (N, P)] = [2^{10} \times 3^3 \times 5^3, (2^8 \times 3^2 \times 5^3, 2^{10} \times 3^5 \times 5^2)]$$

$$[2^{10} \times 3^3 \times 5^3, 2^8 \times 3^5 \times 5^2] = 2^{10} \times 3^5 \times 5^3$$

$$(M, [N, P]) = (2^{10} \times 3^3 \times 5^3, 2^{10} \times 3^5 \times 5^3) = 2^{10} \times 3^3 \times 5^3$$

$$\frac{[M, N]}{(N, P)} = \frac{2^{10} \times 3^2 \times 5^3}{2^8 \times 3^5 \times 5^2} = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$(M, MP) = (2^{10} \times 3^3 \times 5^3, 2^{10} \times 3^8 \times 5^5) = 2^{10} \times 3^3 \times 5^3 = M$$

$$[N, NP] = [2^8 \times 3^2 \times 5^3, 2^{18} \times 3^{11} \times 5^5] = 2^{18} \times 3^{11} \times 5^5 = NP$$

نماد علمی اعداد

دانشمندان برای محاسبه‌ی جرم اجسام بزرگ مانند سیارات و یا جرم اجسام بسیار کوچک مانند جرم یک اتم از یک عنصر به اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک نیاز دارند که نوشتن و خواندن آن‌ها دشوار است. برای رهایی از مشکل قالبی را برای عددنویسی قرارداد کرده‌اند که به آن نماد علمی می‌گویند.

نماد علمی هر عدد مثبت به صورت $k \times 10^n$ می‌باشد که در آن k عددی است اعشاری بین یک و ده و n نیز عددی صحیح می‌باشد.

تمرین‌های فصل سوم

۱. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

الف) $9^{20} \times 18^{10} \times 16^{20} \times 8^{10}$

ب) $16^7 \left[8^{11} \div (0/5)^{11} \right]$

ج) $\frac{12^{19} \times 4^{17}}{4^{11} \times 12^{13}}$

د) $\frac{38^{10} \times 9^{15}}{9^5 \times 57^{10}}$

هـ) $-7^{10} \times (-7)^{10} \times (-7)^9$

و) $15^{23} \times (15^2)^3 \times 15^{32}$

ز) $(10^2)^{32} \times (10^{23})^2 \times 10^{232}$

ح) $27^{10} \times 81^7 \times 243^4$

ط) $\frac{64^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8}{16^3 \times 8^4}$

ی) $125^{24} \times 625^{32} \times (25^{32})^4$

ک) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{4}{6}\right)^5 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{11} \times \left(\frac{8}{27}\right)^2$

ل) $2^{148} \times 5^{111} \times 3^{74}$

۲. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

الف) $(0/25)^{-9} \times (0/125)^2 \times 128^3$

ب) $(0/2)^{-8} \times 625^2 \times (0/04)^3$

ج) $\frac{125^{-4} \times (0/0016)^2}{(0/008)^3 \times 25^7}$

د) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{5}{3}\right)^7 \times \left(\frac{9}{25}\right)^7 \times \left(\frac{125}{27}\right)^{-4}$

هـ) $\frac{16^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5}{(0/25)^{-3} \times 8^{-7}}$

و) $\frac{120^{11} \times 80^{-4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{20^7 \times 6^{-5} \times (0/25)^{-2}}$

$$ز) \frac{5^{-7} \div 3^{-2}}{3^2 \div 5^{11}}$$

$$ح) \frac{5^{1500} \times 2^{2000}}{2000 \cdot 400}$$

$$ط) \frac{125^8 \div 9^{-12}}{81^6 \div 25^{-3}}$$

$$ی) \frac{(0.04)^{-19} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-4}}{3125^{-7} \times \left(\frac{1}{225}\right)^{-2}}$$

۳. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$الف) \frac{27^{12} + 27^{12} + 27^{12}}{9^{20} + 9^{20} + 9^{20}}$$

$$ب) \frac{125^7 + 125^7}{625^{-2} + 625^{-2}}$$

$$ج) \frac{2^{90} + 2^{87}}{2^{80} + 2^{77}}$$

$$د) \left(3^{10} + 3^{10} + 3^{10}\right)^7 \left(2^{10} + 2^{10}\right)^7$$

$$هـ) \frac{25^{-30} + 25^{-30} + 25^{-30}}{5^{-15} + 5^{-15} + 5^{-15}}$$

$$و) \frac{4^{25} + 2^{48}}{4^{24} + 2^{46}}$$

$$ز) \frac{240 \cdot 15 \div 12^{22}}{15^{30} \div 6^{37}}$$

$$ح) \frac{37 \times 25^{10} - 12 \times 5^{20}}{(0.2)^{-8} \div (0.04)^{11}}$$

$$ط) \frac{25^{105} + 5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \dots \times 5^{20}}{5^{-70} + 5^{-70}}$$

$$ی) 2^5 \times 5^{-5} \times 2^{10} \times 5^{-10} \times \dots \times 2^{100} \times 5^{-100}$$

$$ک) 2^{70} + 2^{70} + 2^{71} + 2^{72} + \dots + 2^{100}$$

$$ل) \frac{2^{50} + 2^{51} + 2^{52} + \dots + 2^{100}}{2^{-50} + 2^{-51} + 2^{-52} + \dots + 2^{-100}}$$

$$م) 10 \times 5^{19} + 7 \times 5^{20} - 4 \times 5^{20}$$

$$ن) 11 \times 3^{20} - 2 \times 3^{21} + 4 \times 3^{20}$$

$$س) 4^{1000} + 16^{500} + 64^{100} \times 2^{1400} + 2^{2000}$$

ع) $3^{50} + 3^{50} + 3^{50} + 3^{51} + 3^{51} + 3^{52} + 3^{52} + \dots + 3^{100}$

ف) $27^{11} + 2 \times 3^{33}$

ص) $25^{25} + 3125^{10} + 3 \times 5^{50}$

۴. مربع و ربع عدد 64^{72} را حساب کنید.

۵. عدد $2^{40} \times 5^{35}$ یک عدد چند رقمی است؟

۶. اگر $A = 2^{x+2}$ و $B = 3 \times 2^{x+5}$ چه رابطه‌ای دارند؟

۷. اگر $A = 3^{2x+1}$ و $B = 9^{x-2}$ باشد، بین A و B چه رابطه‌ای برقرار است؟

۸. اگر $3^x = 10$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) 16^{x-1} ب) $(0/125)^{1-x}$ ج) $4^x + 8^{2x}$ د) $(3^x - 8)^x$

۹. اگر $5^x = 10$ حاصل عبارت $\left[\left((5^x - 5)^x - 5 \right)^x \right]^{100}$ را حساب کنید.

۱۰. اگر $3^x = 3$ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$(2^{2x-1} - 3^{x-1} - 2^0)^{5x-5}$

۱۱. اگر $3^a = 3$ و $3^b = 2$ ، مطلوبست حاصل عبارات زیر:

الف) $3^{ab} + 3^{ab}$ ب) $2^{-ab} + ab$

۱۲. دو عدد 3^{23} و 2^{33} را با هم مقایسه کنید.

۱۳. سمت راست عدد $250^7 \times 54^5 \times 150^6$ چند رقم صفر قرار می‌گیرد؟

۱۴. دو عدد 27^{-134} و 81^{-100} را با هم مقایسه کنید.

۱۵. بین اعداد $1 - 20^4$ و $1 + 30^4$ چند عدد مربع کامل وجود دارد؟

۱۶. کوچک ترین عددی که باید در عدد ۵۴۰۰ ضرب شود تا آن را مربع کامل کند چیست؟
مکعب کامل چه طور؟

۱۷. عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}{4 \times 2^{x+3} - 2 \times 2^{x+2} - 2^{x+3}}$$

۱۸. اگر $A = 9^{25}$ و $B = 27^{16}$ حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

$$\frac{6A^3}{A + 9B}$$

۱۹. هر دسته از اعداد زیر را با هم مقایسه کنید:

99^{20} و 9999^{10} (الف) 90^{10} و 10^{20} (ب)

۲۰. اگر $3^x = 10$ و $2^y = 5$ باشند، حاصل $(4^y + 1 - 19)^{x+1}$ چیست؟

۲۱. اعداد 64^3 و 16^5 و 2^{19} را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۲۲. اعداد 3×7^{1000} و 15×7^{998} و 8×7^{999} و 7^{1001} را مقایسه کنید.

۲۳. اعداد 2^{-2000} و 3^{-1500} و 5^{-1000} را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۲۴. اعداد 4^{25} و 9^{15} را مقایسه کنید.

۲۵. بزرگ ترین عدد طبیعی m را تعیین کنید به طوری که $625^{225} \leq m^{300}$.

۲۶. حاصل کسر $\frac{2^8 + 2^9 + 2^{10} + \dots + 2^{35}}{2^{22} + 2^8}$ چیست؟

۲۷. اگر $2^{3a} = x$ و $8^{a+1} = y$ باشد، چه رابطه ای بین x و y موجود است؟

۲۸. کوچک ترین عدد طبیعی که باید در عدد $9^7 \times 8^{17} \times 22^{13} \times 49^{17} \times 35^3$ ضرب شود تا حاصل مربع کامل باشد چیست؟

۱.۲۹ اگر $a = (3^k + 1)^2 \times 9$ و $b = (3^k - 1)^2 \times 27$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۳. کوچک‌ترین عددی که باید در ۲۴۰۰ ضرب شود و آن را مجذور کامل کند چیست؟

۳.۱ اگر $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ و $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ و $t > 0$ و $t \neq 1$ باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

۳.۲ اگر $3^a = 3$ و $3^{-b} = 2$ باشد، حاصل $(ab)^{-8} - (ab)^{-7}$ را حساب کنید.

۳.۳ به ازای چه مقداری از n حاصل عبارت $5^{n+3} \times 4^{n-1}$ به صورت توانی از ۱۰ می‌شود؟

۳.۴ سمت راست عدد ۵۰! چند رقم صفر قرار می‌گیرد؟

۳.۵ مجموع ارقام عدد $100^{175} - 175$ چیست؟

۳.۶ معادلات توانی زیر را حل کنید:

الف) $5^{2x+2} \times 5^{2x} = 0.0025$

ب) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-1/5} \times 7^x = 7^4$

ج) $2^{x+1} + 2^{2+x} = 6$

د) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$

هـ) $5^{2x+1} + 25^x - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x} = 5^{101}$

و) $7^{x+1} - 5^{2x+1} = 5^{2x} + 7^x$

ز) $\frac{27^{x-1} + 81^x}{3^3 x} = \frac{4}{27}$

ح) $\frac{5^{3x+2} - 5^{3x+1}}{9^{x+1} + 3^{2x}} = \frac{250}{9}$

ط) $\frac{(0.25)^{1-x} \times 80^{-x}}{(0.1)^{x+2} \times (0.2)^{-2}} = 1$

ی) $\frac{4^{x+2} \times 5^x}{2^{2x+2} \times 10^{x-1}} = 5$

ک) $\frac{9^x + 3^{x+2} + 18}{1 + 3^x} = 18$

ل) $(0.008)^{x-2} = 25^{x+3}$

۳۷. دستگاه معادلات توانی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \times 2^{4y+12} \\ 5^{x-y+1} = 25 \cdot \frac{2y+1}{2} \end{cases}$$

۳۸. اگر $\frac{4^x}{4^x+y} = 243$ و $\frac{9^{x+y}}{35y}$ باشد، حاصل xy چقدر است؟

۳۹. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک هر دسته از اعداد زیر را به‌دست آورید.

الف) ۶۲۴۰ و ۹۳۶۰

ب) ۱۳۲ و ۱۹۸ و ۴۴۰ و ۳۳۰

ج) $24^7 \times 33^2 \times 36^5 \times 22^3$

د) $120^3 \times 8^5$ و $12^4 \times 9^3 \times 42^5$ و $80^3 \times 49$

۴۰. اگر ب. م. دو عدد $72a$ و $48a^2$ برابر ۱۲۰ باشد، ک. م. اعداد $150a$ و $120a^2$ را حساب کنید. ($a \neq 2, 3$)

۴۱. کوچک‌ترین عدد چهار رقمی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر هر یک از اعداد ۱۸ و ۲۴ و ۴۰ برابر پانزده باشد، چیست؟

۴۲. همه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک سه عدد ۲۶۴ و ۳۶۰ و ۴۸۰ را بنویسید.

۴۳. اگر a بر b و b بر c بخش‌پذیر باشد، حاصل $\left[(a^3, b^2), c^2 \right]$ چیست؟

۴۴. اگر a و b دو عدد متباین باشند، حاصل $\left[a^{17}, (a^{12}, b^{20}) \right]$ چیست؟

۴۵. اگر $A = 120^6 \times 245^2$ و $B = 180^5 \times 700^3$ باشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک A و B را تعیین کنید.

۴۶. نماد علمی هریک از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۰/۰۰۰۰۱۳۷۹

ب) ۲۰۰۱

ج) ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۲۸

د) $14/546 \times 10^{-8}$

$$\text{هـ) } ٠/٠٠٠٠٣ \times ٠/٠٠٠٠٩ \times (٠/٠٠١)^{-٢} \quad \text{و) } ٠/٠٠٥٠١ \times ١٠^٢$$

$$\text{ز) } (٠/٠١)^{-٥} \times ١٠٠٠٠٠٤ \times ٠/٠٠٠٢ \times \frac{١}{(٠/٠٠٠١)^٥}$$

$$\text{ح) } \frac{٢٧ \times ١٠^{-٥} \times ٥٤٠ \times ٧٥٠٠ \times ١٠^٢}{٨٠ \times ١٠^{-٢} \times ٥^٣ \times ١٠^{-٢} \times ٩^٢}$$

$$\text{ط) } \frac{٣٥ \times ٥٠}{٠/٠١ \times ١٠^٢}$$

📖 فصل چهارم

چند جمله‌ای‌ها

عبارت جبری

عبارت ریاضی که روی مجموعه‌ی اعداد بیان شده عبارت جبری نامیده می‌شود. هر عبارت جبری مشتمل بر نمادها و حروف می‌باشد که در واقع بیانگر اعدادند و شامل نشانه‌هایی مربوط به روابط و اعمالی است که باید روی آن اعداد عمل شود. به کارگیری حروف و علامت‌ها نخستین بار در علم جبر آغاز شد.

در هر عبارت جبری عددها و حرف‌هایی که جانگهدار اعدادی مشخص و معین باشند مقادیر معلوم (پارامتر) و حرف‌هایی که نشان‌دهنده‌ی اعداد غیرمشخص باشند، متغیرهای عبارت نامیده می‌شوند. یک عبارت جبری با متغیرهایش معین می‌شود و برحسب تعداد متغیرها آن را عبارت یک متغیری یا دو متغیری یا چندمتغیری می‌نامند.

عبارت جبری با متغیر x را با $f(x)$ و عبارت جبری با دو متغیر x و y را با نماد $f(x, y)$ نشان می‌دهیم. مانند:

$$f(x) = 2x + 1 \quad f(x, y) = x^2 + 2y \quad f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

☆ عبارات جبری معین و نامعین

عبارت جبری را به ازای یک مقدار از متغیر (یا مقادیری از متغیرها) معین گویند، هرگاه به ازای آن مقدار (یا آن مقادیر) کلیه‌ی عملیات به کار رفته قابل انجام باشد. در غیر این صورت عبارت جبری نامعین است. در مجموعه‌ی اعداد حقیقی در صورتی که مخرج کسر به ازای مقادیری از متغیر صفر شود عبارت نامعین می‌باشد. هم‌چنین یک عبارت جبری گنگ با فرجه‌ی زوج در صورتی نامعین است که به ازای مقادیری از متغیر عبارت زیر رادیکال منفی باشد.

مثال ۱: مشخص کنید عبارات جبری زیر به ازای چه مقادیری از x معین می‌باشند؟

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$p(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$Q(x) = \sqrt{x-3}$$

حل:

عبارت $f(x)$ به ازای $x = 1$ و $x = -1$ نامعین است و به ازای سایر مقادیر حقیقی معین است.

عبارت جبری $g(x)$ به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی معین است. زیرا نه مخرج دارد و نه رادیکال.

عبارت $p(x)$ نیز همواره معین است چرا که فرجه‌ی رادیکال فرد است.

عبارت $Q(x)$ به ازای همه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ معین است.

$$x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

☆ اقسام عبارتهای جبری

عبارات جبری با توجه به نوع نماهایی که متغیرها دارند به گونه‌های مختلف تقسیم می‌شود:

۱- عبارت جبری صحیح: یک عبارت جبری را نسبت به متغیرهایش صحیح گویند در صورتی که توان متغیرهایش صحیح و نامنفی باشد. مانند:

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$g(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{5}$$

۲- عبارت جبری کسری: یک عبارت جبری نسبت به حرفی از آن، کسری است هرگاه اقلأً یک عامل شامل حرف مزبور دارای نمای منفی باشد. یعنی کسری وجود داشته باشد که مخرج آن شامل آن حرف باشد، مانند:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$$

۳- عبارت جبری گویا: یک عبارت جبری نسبت به حرفی از آن گویاست هرگاه هیچ توان غیرصحیح از آن حرف در عبارت وجود نداشته باشد، مانند هریک از مثال‌های بالا.

هرگاه لااقل یک توان غیر صحیح شامل یک متغیر در عبارت وجود داشته باشد، عبارت نسبت به آن متغیر گنگ می‌باشد. مانند عبارت $f(x, y) = x + \sqrt{x+1} + 2y$ که نسبت به x گنگ و نسبت به y گویاست. (لازم به تذکر است متغیرهایی که زیر رادیکال قرار می‌گیرند توانشان کسری است).

مثال ۲: از عبارات زیر کدام یک گنگ و کدام یک گویا هستند؟

$$f(x) = x + \sqrt{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$h(x) = 3x^2 + 2x + \sqrt{x}$$

$$t(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x + 1$$

حل: 

$f(x)$ و $t(x)$ گویا و $g(x)$ و $h(x)$ گنگ می‌باشند.

☆ حوزه تعریف یک عبارت جبری

مجموعه‌ای که به ازای هر عضو آن عبارت جبری، به عبارتی معین تبدیل شود حوزه تعریف عبارت نامیده می‌شود.

هر عبارت جبری صحیح همواره معین است. لذا حوزه تعریف آن مجموعه‌ای اعداد حقیقی است. هر عبارت کسری به ازای مقادیری که مخرج عبارت را صفر می‌کنند نامعین و به ازای سایر مقادیر حقیقی معین است. همچنین یک عبارت جبری گنگ با فرجه‌ی فرد همواره معین است و حوزه تعریفش مجموعه‌ای اعداد حقیقی است. اما اگر فرجه زوج باشد عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

مثال ۳: حوزه تعریف هریک از عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x - 1$

ب) $f_2(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$

ج) $f_3(x) = \sqrt[3]{2x-5}$

د) $f_4(x) = \sqrt{x+5}$

هـ) $f_5(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x-2}$

و) $f_6(x) = \sqrt{\frac{-1}{x+2}} + \sqrt{\frac{1}{x+5}}$

حل: 

الف) $f_1(x)$ همواره معین است و حوزه تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

ب) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \text{حوزه تعریف} = R - \{-2, 2\}$

ج) با توجه به این که فرجه‌ی رادیکال در عبارت $f_3(x)$ فرد است، لذا این عبارت همواره معین است و حوزه تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

د) $x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5$

حوزه تعریف $= \{x | x \in R, x \geq -5\}$

ه) عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است. لذا $f_5(x)$ همواره معین و دامنه‌ی آن R است.

و)
$$\begin{cases} x + 2 < 0 \rightarrow x < -2 \\ x + 5 > 0 \rightarrow x > -5 \end{cases} \Rightarrow -5 < x < -2$$

حوزه تعریف $= \{x | x \in R, -5 < x < -2\}$

☆ مقدار عددی یک عبارت جبری

هر عبارت جبری روی مجموعه‌ی اعداد بیان شده است. بنابراین خود نشاندهنده‌ی یک عدد است که این عدد بر حسب مقادیری که به جای متغیر قرار می‌دهیم محاسبه می‌شود. اگر $f(x)$ یک عبارت جبری باشد مقدار عددی عبارت را به ازای $x = a$ به صورت $f(a)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال مقدار عددی عبارت $2x - 1$ به ازای $x = 5$ برابر است با:

$$2 \times 5 - 1 = 9$$

مثال ۴: مقدار عددی عبارت $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{17}$ را به ازای $x = 1$ حساب کنید.

حل: 

$$f(1) = (1^2 - 2 \times 1 + 1)^{17} = 0^{17} = 0$$

مثال ۵: اگر $f(x) = x^2 - 1$ حاصل $f(3)$ و $f(\sqrt{2})$ و $f(x+1)$ را به دست آورید.

حل: 

$$f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$$

مثال ۶: نشان دهید مقدار عددی عبارت زیر در صورتی که $x = -y$ باشد، برابر صفر است.

$$A = (x + y + z)(xy + yz + xz) - xyz$$

حل: 

$$\begin{aligned} A &= (-y + y + z)(-y \times y + yz - yz) - (-y)yz = z(-y^2) + y^2z \\ &= -y^2z + y^2z = 0 \end{aligned}$$

یک جمله‌ای جبری

یک عبارت جبری صحیح که فقط شامل عمل ضرب و توان طبیعی باشد یک جمله‌ای جبری نامیده می‌شود. حاصل ضرب عامل‌های عددی و معلوم را ضریب عددی یک جمله‌ای و مجموع نماهای متغیرهای آن را درجه‌ی یک جمله‌ای می‌گویند.

درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است با نمای این متغیر در آن یک جمله‌ای، درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به متغیری که در یک جمله‌ای نیست صفر است.

مثال ۷: یک جمله‌ای $5x^2y^3z$ را در نظر بگیرید. ضریب عددی این یک جمله‌ای ۵ است.

این یک جمله‌ای نسبت به x از درجه‌ی ۲، نسبت به y از درجه‌ی ۳ و نسبت به z از درجه‌ی یک و نسبت به سایر حروف از درجه‌ی صفر است. هم‌چنین درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به همه‌ی حروف برابر $2 + 3 + 1 = 6$ است.

مثال ۸: ضریب عددی و درجه‌ی یک جمله‌ای زیر را نسبت به همه‌ی حروف به دست آورید.

$$A = 2x^2y^3zx^3 \times \frac{3}{4}y^5$$

حل: 

ابتدا با استفاده از قواعد توان باید یک جمله‌ای را ساده کنیم:
 $A = 3x^5y^8z$
 ضریب عددی ۳ و درجه‌ی A نسبت به x و y و z به ترتیب از درجه‌ی ۵ و ۸ و ۱ و نسبت به همه‌ی حروف از درجه‌ی ۱۴ است.

مثال ۹: کدام یک از عبارات زیر یک جمله‌ای هستند؟

الف) $\frac{4xy}{z}$

ب) $5x^2y^2 + 1$

ج) 12

د) $5^{-1}x^2 \times 3x$

حل: 

الف و ب یک جمله‌ای نیستند ولی ج و د یک جمله‌ای جبری می‌باشند.

☆ یک جمله‌ای متشابه

چند یک جمله‌ای را متشابه گویند، در صورتی که حروفشان یکسان و نمای حروف متناظر با هم برابر باشند. مانند $7x^2y$ و $-3x^2y$ و $\sqrt{3}x^2y$.

☆ جمع و تفریق یک جمله‌ای جبری

دو یا چند یک جمله‌ای را در صورتی می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد که جمله‌ها متشابه باشند. برای این منظور کافی است ضرایب عددی جمله‌ها را با هم جمع (تفریق) کرد.

مثال ۱۰:

$$\text{الف) } 7ab + 3ab = (7 + 3)ab = 10ab$$

$$\text{ب) } 12ab^2 - 5ab^2 = (12 - 5)ab^2 = 7ab^2$$

$$\text{ج) } \frac{ab}{2} - \frac{2ab}{3} + \frac{ab}{4} + \frac{5}{12}ab = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \right) ab = \left(\frac{6 - 8 + 3 + 5}{12} \right) ab = \frac{ab}{2}$$

$$\text{د) } 3a^2b^3 + 5a^2b^3 - 7a^2b^3 = (3 + 5 - 7)a^2b^3 = a^2b^3$$

☆ ضرب (تقسیم) یک جمله‌ای جبری در یک عدد

برای این که یک جمله‌ای جبری را در یک عدد ضرب یا بر یک عدد تقسیم کنیم، کافی است ضریب جمله را در آن عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم کنیم.

مثال ۱۱:

$$\text{الف) } 18a^2b^3c^4 \times 2 = 36a^2b^3c^4$$

$$\text{ب) } 18a^2b^3c^4 \div 2 = 9a^2b^3c^4$$

☆ ضرب یک جمله‌ای‌ها

برای ضرب دو یک جمله‌ای جبری، ضرایب عددی را در هم و حروف متناظر را نیز در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۱۲:

الف) $\Delta x^2 y^3 \times 2x^2 y^2 z = 10x^5 y^5 z$

ب) $\frac{2}{3}x^4 y^2 z^3 \times 6xy^2 z^2 \times x^5 y^5 z^5 = 4x^10 y^10 z^10$

مثال ۱۳: اگر $A = 2a^2 b$ و $B = 3ac^2$ و $C = 5b^2 c$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\left(\frac{2AB}{3}\right)^2$

ب) $A^2 C^2$

ج) $(ABC)^2$

د) $\frac{3}{2}A \times \frac{5}{3}B \times \frac{4}{5}C$

حل: 

الف) $\left(\frac{2AB}{3}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 2a^2 b \times 3ac^2}{3}\right)^2 = (2a^2 bc^2)^2 = 4a^4 b^2 c^4$

ب) $A^2 C^2 = (2a^2 b)^2 (5b^2 c)^2 = (4a^4 b^2)(25b^4 c^2) = 100a^4 b^6 c^2$

ج) $(ABC)^2 = (2a^2 b \times 3ac^2 \times 5b^2 c)^2 = (30a^4 b^3 c^3)^2 = 900a^8 b^6 c^6$

د) $\frac{3}{2}A \times \frac{5}{3}B \times \frac{4}{5}C = 2ABC = 2 \times 2a^2 b \times 3ac^2 \times 5b^2 c = 60a^4 b^3 c^3$

مثال ۱۴: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $2a^2 b \times 3a^2 b^4 + 4a \times a^4 b^5$

ب) $16a^5 b^{10} - (2ab^4 \times 3a^2) \left(\frac{1}{3}b^2 a^2 \times 2a^2 b^2 \right) - 3a^5 \times (ab^5)^2$

حل: 

الف) $2a^2 b \times 3a^2 b^4 + 4a \times a^4 b^5 = 6a^4 b^5 + 4a^5 b^5 = 10a^4 b^5$

ب) $16a^5 b^{10} - (2ab^4 \times 3a^2) \left(\frac{1}{3}b^2 a^2 \times 2a^2 b^2 \right) - 3a^5 \times (ab^5)^2$

$= 16a^5 b^{10} - 6a^3 b^4 \times \frac{2}{3}a^4 b^4 - 3a^5 \times a^2 b^{10}$

$= 16a^5 b^{10} - 4a^7 b^8 - 3a^7 b^{10} = 9a^5 b^{10}$

مثال ۱۵: اگر $A = 3a^2b^4$ و $B = 5a^3b^6$ ، حاصل عبارت $(A^3 - B^2)^5$ را به دست آورید.

حل: 

$$(A^3 - B^2)^5 = (27a^6b^{12} - 25a^6b^{12})^5 = (2a^6b^{12})^5 = 32a^{30}b^{60}$$

☆ تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

برای تقسیم یک جمله‌ای A بر یک جمله‌ای B ، ضرایب عددی را بر هم و حروف متناظر را بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۶:

الف) $18a^2b^3c^4 \div 6ab^3c^2 = 3ac^2$

ب) $2a^5b^5 \div 5b^3a^4 = \frac{2}{5}a^2b^2$

مثال ۱۷: اگر $A = 6x^2y^3z^4$ و $B = 4x^4y^3z^2$ و $C = 12x^2y^2z^2$ حاصل

عبارت $\frac{A \times 2B}{C}$ را به دست آورید.

حل: 

$$\frac{A \times 2B}{C} = \frac{6x^2y^3z^4 \times 2 \times 4x^4y^3z^2}{12x^2y^2z^2} = \frac{48x^6y^6x^4}{12x^2y^2z^2} = 4x^4y^4z^2$$

☆ بخش‌پذیری یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

یک جمله‌ای A بر یک جمله‌ای B بخش‌پذیر است، در صورتی که حاصل تقسیم A بر B خود یک جمله‌ای باشد و این در صورتی میسر است که اولاً همه‌ی متغیرهای B در A نیز باشند. ثانیاً نمای عامل‌های موجود در B از نمای عامل‌های متناظرشان در A کوچک‌تر یا مساوی باشند.

مثال ۱۸: یک جمله‌ای $A = 6a^2b^2c^4$ بر کدام یک از جمله‌های زیر بخش‌پذیر است؟

$$B = 2a^2bc^2 \quad C = 5a^3c^2 \quad D = 3a^3b^3 \quad E = 7a^2bc^2d$$

حل: 

عبارت A بر یک جمله‌ای‌های B و C بخش‌پذیر است ولی بر یک جمله‌ای‌های D و E بخش‌پذیر نیست.

چندجمله‌ای (بس جمله‌ای)

مجموع جبری چند یک جمله‌ای که همه‌ی آن‌ها متشابه نباشند یک چندجمله‌ای نامیده می‌شود. چندجمله‌ای با یک متغیر x را با $p(x)$ یا $Q(x)$ و مانند آن و چندجمله‌ای با چند متغیر x و y و z و ... را با $p(x, y, z, \dots)$ یا $Q(x, y, z, \dots)$ نشان می‌دهند.


$$P(x) = 2x^5 - 7x^4 - x^2 + 1$$

$$P(x, y) = x^2y^3 - 5xy^2 + 2xy - 3$$

☆ درجه‌ی چندجمله‌ای

درجه‌ی چندجمله‌ای عبارتست از درجه‌ی جمله‌ای از آن که نسبت به دیگر جمله‌های آن بزرگ‌ترین درجه را داشته باشد. مثلاً چندجمله‌ای $4x^5 + 5x^2y^3 + 3x^3y^4 - 2yx - 6$ نسبت به متغیرهایش از درجه‌ی ۷ است که همان درجه‌ی $3x^3y^4$ است. هم‌چنین چندجمله‌ای مزبور نسبت به x از درجه‌ی ۵ و نسبت به y از درجه‌ی ۴ است.

مثال ۱۹: معین کنید چندجمله‌ای $3x^2 + 4y^3 + x^2y^3 + x^4y + 2y^5x$ نسبت به هریک از متغیرهای x و y و هم‌چنین نسبت به همه‌ی حروف از چه درجه‌ای است؟

حل: 

درجه‌ی چندجمله‌ای نسبت به x برابر ۴ و نسبت به y برابر ۵ و نسبت به همه‌ی حروف برابر ۶ است.

☆ مجموع ضرایب چندجمله‌ای

مجموع ضرایب چندجمله‌ای $p(x)$ در واقع با مقدار عددی آن به ازای $x = 1$ که آن را با $p(1)$ نشان می‌دهیم، برابر است. هم‌چنین مجموع ضرایب چندجمله‌ای $p(x, y, z, \dots)$ برابر $p(1, 1, 1, \dots)$ است.

مثال ۷۰: مجموع ضرایب هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را به دست آورید.

$$p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 7$$

$$Q(x) = (5x^2 - 7x + 1)^{20}$$

$$R(x, y) = (2x - y)(x^2 + 4xy + 3y^2)$$

حل: 

$$p(1) = 5 \times 1^4 - 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 2 \times 1 - 7 = 5 - 2 + 3 - 2 - 7 = -3$$

$$Q(1) = (5 \times 1^2 - 7 \times 1 + 1)^{20} = (5 - 7 + 1)^{20} = (-1)^{20} = 1$$

$$R(1, 1) = (2 \times 1 - 1)(1^2 + 4 \times 1 \times 1 + 3 \times 1^2) = (2 - 1)(1 + 4 + 3) = 1 \times 8 = 8$$

☆ چندجمله‌ای همگن

اگر همه‌ی جمله‌های یک چندجمله‌ای هم درجه باشند، آن چندجمله‌ای را همگن یا متجانس می‌نامند، مانند:

$$p(a, b) = 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$p(x, y) = x^5 - 3x^4y + 2x^2y^3 - 6xy^4$$

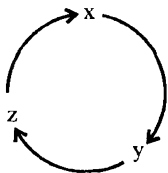
از ویژگی‌های چندجمله‌ای همگن درجه‌ی n یکی آن است که اگر هریک از متغیرهای آن در عدد ثابت k ضرب شود آن چندجمله‌ای در k^n ضرب می‌گردد. در مثال بالا:

$$p(ka, kb) = k^4 \cdot p(a, b)$$

$$p(kx, ky) = k^5 p(x, y)$$

☆ چندجمله‌ای متقارن

یک چندجمله‌ای دومتغیره متقارن نامیده می‌شود هرگاه با جابه‌جا کردن هر دو متغیر از آن، چندجمله‌ای تغییر نکند. یک چندجمله‌ای با سه متغیر متقارن است در صورتی با هر تبدیل دوری تغییر نکند، مانند:



$$p(x, y) = p(y, x)$$

$$p(x, y, z) = p(z, x, y) = p(y, z, x)$$

$$p(a, b) = 3a^2 + 3b^2 - 2ab + 1$$

$$Q(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc(a + b + c)$$

ممکن است یک چندجمله‌ای هم متقارن و هم همگن باشد، مانند:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

ویژگی مهم چندجمله‌ای متقارن $p(x, y)$ آن است که می‌توان آن را برحسب $x + y$ و xy بیان کرد. از ویژگی‌های دیگر عبارات متقارن این است که با هر تبدیل دوری به عبارت متقارن دیگر تبدیل می‌شوند.

☆ چندجمله‌ای زوج و چندجمله‌ای فرد

چندجمله‌ای را نسبت به یک متغیر زوج گویند، در صورتی که با تبدیل آن متغیر به قرینه‌ی خود، چندجمله‌ای فرق نکند. یعنی $p(-x) = p(x)$ و اگر با تبدیل متغیر به قرینه‌ی خود، چندجمله‌ای نیز به قرینه‌ی خود تبدیل شود، یعنی $p(-x) = -p(x)$ آن چندجمله‌ای را نسبت به آن متغیر فرد گویند. ممکن است یک چندجمله‌ای نه زوج باشد و نه فرد.

مثال ۱۱: چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + 1$ زوج و چندجمله‌ای $Q(x) = x^3 + x$ فرد و

چندجمله‌ای $k(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ نه زوج است و نه فرد.

☆ چندجمله‌ای استاندارد (متعارف)

یک چندجمله‌ای را استاندارد گویند در صورتی که برحسب توان‌های نزولی مرتب شده باشد.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

مثال ۱۲: چندجمله‌ای $p(x) = x^2 - 7x^4 + x^5 - 3x + 2 + x^3$ را به صورت

استاندارد بنویسید.

✎ حل:

$$p(x) = x^5 - 7x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2$$

☆ چندجمله‌ای متحد با صفر (قضیه)

برای این که یک چندجمله‌ای متحد با صفر باشد لازم و کافی است که همه‌ی ضریب‌های آن صفر باشند.

اثبات: چندجمله‌ای $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را در نظر

بگیرید.

اولاً: اگر داشته باشیم $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ مقدار چندجمله‌ای به ازای هر مقدار از x صفر می‌شود.

ثانیاً: اگر چندجمله‌ای به ازای هر مقدار از x متحد با صفر باشد به ازای $x = 0$ نیز صفر است. لذا $a_0 = 0$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x = 0$$

$$x (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1) = 0$$

این عبارت در صورتی همواره صفر است که عبارت داخل پرانتز صفر باشد. لذا به ازای $x = 0$ نیز باید صفر باشد که از آن‌جا خواهیم داشت $a_1 = 0$. به همین ترتیب با تکرار استدلال می‌توان گفت:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

☆ چندجمله‌ای‌های متحد

برای آن‌که دو چندجمله‌ای چندمتغیری با هم متحد باشند لازم و کافی است که جمله‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم متحد باشند.

برای آن‌که دو چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر متحد باشند، لازم و کافی است که ضرایب جمله‌های هم درجه با هم برابر باشند. زیرا:

اگر دو چندجمله‌ای $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

و $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ با هم متحد باشند، تفاضل آن‌ها متحد با

صفر است. یعنی:

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \equiv 0$$

مثال ۲۳: مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که دو چندجمله‌ای زیر متحد باشند.

$$p(x) = (a-1)x^3 - 3x^2 + (a+b+2)x + c - 2$$

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + b - 1$$

حل: 

$$\begin{cases} a-1=2 \rightarrow a=3 \\ a+b+2=-1 \rightarrow 3+b+2=-1 \rightarrow b=-6 \\ c-2=b-1 \rightarrow c-2=-6-1 \rightarrow c=-5 \end{cases}$$

اعمال بر چندجمله‌ای‌ها

☆ جمع چندجمله‌ای‌ها

برای به دست آوردن حاصل جمع چندجمله‌ای‌ها فقط جملات متشابه را با هم جمع می‌کنیم و جملات غیرمتشابه را عیناً می‌نویسیم.

مثال ۲۴ :

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad (2a + 3b - 7) + (5a - 4b - 3) &= 2a + 3b - 7 + 5a - 4b - 3 \\ &= 7a - b - 10 \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad (3a^2 + 5a) + (a - 2a^2 - 5) = 3a^2 + 5a + a - 2a^2 - 5 = a^2 + 6a - 5$$

مثال ۲۵ : اگر $A = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{5} - 1$ و $B = \frac{2}{3}x^2 + \frac{12}{5}x + 3$ حاصل $A + B$ را تعیین کنید.

حل: 

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{5} - 1 \right) + \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{12}{5}x + 3 \right) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x - 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{12}{5}x + 3 \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

مثال ۲۶ : اگر $A = 2xy - 3x - x^2y + 7$ و $B = 7x + 11 - 3xy + xy^2$ حاصل $A + B$ را به دست آورید.

حل: 

$$\begin{aligned} A + B &= 2xy - 3x - x^2y + 7 + 7x + 11 - 3xy + xy^2 = -xy + 4x - x^2y \\ &\quad + xy^2 + 18 \end{aligned}$$

خاصیت پخش (توزیع پذیری) ضرب نسبت به جمع (تفریق)

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \quad A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

☆ ضرب یک عدد در یک چندجمله‌ای

بنابر خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع و تفریق، برای این که یک عدد را در یک چندجمله‌ای ضرب کنیم کافی است عدد را در تک تک جملات چندجمله‌ای ضرب کنیم.

مثال ۲۷ :

$$\text{الف) } 5(2x - 3y - 1) = 10x - 15y - 5$$

$$\text{ب) } \frac{2}{3}(6x^2 - 3x - 9) = 4x^2 - 2x - 6$$

☆ قرینه‌ی یک چندجمله‌ای

اگر چندجمله‌ای A را در عدد -1 ضرب کنیم چندجمله‌ای حاصل قرینه‌ی چندجمله‌ای A نامیده می‌شود که آن را با $-A$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۸ :

$$A = 2x^2 - 3x + 5$$

$$-A = (-1)(2x^2 - 3x + 5) = -2x^2 + 3x - 5$$

☆ تفریق چندجمله‌ای‌ها

اگر A و B دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه:

$$A - B = A + (-B)$$

مثال ۲۹: اگر $A = 5x^2 - 2x + 3$ و $B = x^2 - 3x - 1$ باشد، آن‌گاه:

$$A - B = A + (-B) = (5x^2 - 2x + 3) + (-x^2 + 3x + 1) = 4x^2 + x + 4$$

$$B - A = B + (-A) = (x^2 - 3x - 1) + (-5x^2 + 2x - 3) = -4x^2 - x - 4$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود $A - B$ و $B - A$ قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال ۳۰: اگر $A = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y - 1$ و $B = 4x - 2y + 6$ حاصل

$$6A - \frac{1}{4}B + 9$$

را به دست آورید.

حل: 

$$6A - \frac{1}{4}B + 9 = 6\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y - 1\right) - \frac{1}{4}(4x - 2y + 6) + 9 = 4x - 3y - 6 - 2x$$

$$+ y - 3 + 9 = 2x - 2y$$

☆ ضرب چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای‌های $A = 2x - 3$ و $B = 3x^2 - 4x + 2$ را در نظر می‌گیریم.

$$A \times B = (2x - 3)(3x^2 - 4x + 2) = 2x(3x^2 - 4x + 2) - 3(3x^2 - 4x + 2)$$

$$= 6x^3 - 8x^2 + 4x - 9x^2 + 12x - 6 = 6x^3 - 17x^2 + 16x - 6$$

با توجه به خاصیت بخشی ضرب نسبت به جمع (تفریق) می‌توان نتیجه گرفت برای ضرب دو چندجمله‌ای A و B کافی است هریک از جمله‌های A را در هریک از جمله‌های B ضرب کرده و حاصل ضرب‌ها را ساده می‌کنیم.

مثال ۳۱: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 2b^2)$

ب) $27a^3 - (3a - b)(9a^2 + b^2 + 3ab) - 7b^3$

ج) $12 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{2}{5} (10x^2 - 15x - 20)$

د) $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$

هـ) $2(a - b)a - 3(a - b)b + 5ab$

و) $3x^2 - 2(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ز) $(a^9 - a^5)(a^4 + a^5) - (a^6 - a^2)(a^{12} + a^{10} + a^4)$

ح) $(3a - 2b)(3a + 2b) - (3a - 2b)(3a + 2b)$

ط) $5a^4 - 5(a^3 - 2b^2)(a^6 + 3a^2b^2 + 2b^4)$

حل: 

الف) $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 2b^2) = a^3 + 2a^2b + 4ab^2 - 2a^2b - 4ab^2 - 2b^3$
 $= a^3 - 2b^3$

ب) $27a^3 - (3a - b)(9a^2 + b^2 + 3ab) - 7b^3$
 $= 27a^3 - (27a^3 + 3ab^2 + 9a^2b - 9a^2b - b^3 - 3ab^2) - 7b^3$
 $= 27a^3 - 27a^3 + b^3 - 7b^3 = -6b^3$

ج) $12 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{2}{5} (10x^2 - 15x - 20) = 3x^2 - 30x + 4 - 4x^2 + 6x + 8$
 $= -x^2 - 24x + 12$

$$د) (2a+b)^2 - (2a-b)^2 = (2a+b)(2a+b) - (2a-b)(2a-b)$$

$$= 4a^2 + 2ab + 2ab + b^2 - (4a^2 - 2ab - 2ab + b^2)$$

$$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 = 8ab$$

$$هـ) 2(a-b)a - 3(a-b)b + 5ab = 2a^2 - 2ab - 3ab + 3b^2 + 5ab$$

$$= 2a^2 + 3b^2$$

$$و) 3x^2 - 2(x+1)(x^2 - x + 1) = 3x^2 - 2(x^2 - x^2 + x + x^2 - x + 1)$$

$$= 3x^2 - 2(x^2 + 1)$$

$$3x^2 - 2x^2 - 2 = x^2 - 2$$

$$ج) (a^9 - a^5)(a^9 + a^5) - (a^6 - a^4)(a^{12} + a^{10} + a^8)$$

$$= a^{18} + a^{14} - a^{14} - a^{10} - (a^{18} + a^{16} + a^{14} - a^{16} - a^{14} - a^{12})$$

$$= a^{18} - a^{10} - a^{18} + a^{12} = a^{12} - a^{10}$$

$$ح) (3a-2b)(3a+2b) - (3a-4b)(3a+4b)$$

$$= (9a^2 + 6ab - 6ab - 4b^2) - (9a^2 + 12ab - 12ab - 16b^2)$$

$$= 9a^2 - 4b^2 - 9a^2 + 16b^2 = 12b^2$$

مثال ۳۲ : اگر:

$$B = 14 \left(2x - \frac{1}{y} \right) \left(7x + \frac{1}{y} \right) \text{ و } A = 4(x^2 + 3) - 2(x-2)(2x-3)$$

حاصل $(B-A)^{2000}$ چیست؟

حل: 

$$B = 14 \times 2 \left(2x - \frac{1}{y} \right) \left(7x + \frac{1}{y} \right) = (14x - 1)(14x + 1) = 196x^2 + 14x - 14x - 1$$

$$= 196x^2 - 1$$

$$A = 4x^2 + 12 - (2x-4)(2x-3) = 4x^2 + 12 - (4x^2 - 6x - 8x + 12)$$

$$= 4x^2 + 12 - 4x^2 + 6x + 8x - 12 = 14x$$

$$(B-A)^{2000} = (196x^2 - 1 - 14x)^{2000} = (-1)^{2000} = 1$$

تمرین‌های فصل چهارم

۱. معین کنید به ازای چه مقادیری از x هریک از عبارات زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند؟

الف) $\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$

ب) $\frac{\sqrt{x-2}}{x^2+2}$

ج) $\frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{1-x}}$

د) $\sqrt{\frac{-5}{2x-6}}$

هـ) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$

و) $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x}}{x\sqrt{x-1}}$

ز) $\sqrt{1-\sqrt{2-x}}$

ح) $\frac{2x-1}{x(2x-1)}$

ط) $\sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$

ی) $\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+x}$

۲. مقدار عددی عبارت $x^4 + x^2 + 1$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست آورید.

۳. اولاً: مقدار عددی عبارت $5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 7x + 2$ را به ازای $x = 1$ حساب کنید.

ثانیاً: مجموع ضرایب عبارت فوق را به دست آورده و با مقدار عددی آن به ازای $x = 1$ مقایسه کنید.

۴. مجموع ضرایب عبارت $(5x^3 - 2x^2 - 3x - 1)^{32}$ چیست؟

۵. مقدار عددی عبارات $(a+b)^3$ و $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ را به ازای $a = 2$ و $b = -3$ به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

۶. مقدار عددی عبارت $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a + b + c)$ را به ازای $a = 2$ و $b = 1$ و $c = -3$ به دست آورید.

۷. مقدار عددی $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ را به ازای $a = 4$ و $b = -4$ و $c = -3$ به دست آورید.

۸. اگر $a = 6$ و $b = 8$ و $c = 10$ و $p = \frac{a+b+c}{2}$ باشند، مقدار عددی عبارت S را به دست آورید.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۹. اگر $2a - b + 5 = 0$ حاصل $\frac{2^{b-1}}{4^{a+1}}$ چقدر است؟

۱۰. اگر $(a+1)^{20} + (b-1)^{20} = 0$ باشد، حاصل $(a^2 - b^2)^{2000}$ چیست؟

۱۱. اگر $(a-4b)^{50} + (b-2c)^{100} = 0$ باشد، حاصل $\frac{10ab}{c(a+b)}$ چیست؟

۱۲. مقدار عددی عبارت $(A^B)^{C^D}$ را به ازای $A = 10$ و $B = D = 2$ و $C = 3$ به دست آورید.

۱۳. مقدار عددی دو عبارت $(2a)^3$ و $2a^3$ را به ازای $a = 10$ به دست آورده و مقایسه کنید.

۱۴. مقدار عددی عبارات $5ab^2$ و $5(ab)^2$ و $(5ab)^2$ را به ازای $a = 2$ و $b = 3$ حساب کرده و مقایسه کنید.

۱۵. اگر A قرینه‌ی B و B معکوس C باشد، حاصل عبارت $[B^2 C^2 + C(A^3 B + B^4)]^{20}$ را تعیین کنید.

۱۶. اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ حاصل $f(1)$ و $f(-2)$ و $f\left(\frac{2}{5}\right)$ را حساب کنید.

۱۷. اگر $f(x) = ax^2 + x + 4$ و $f(1) = 7$ ، مقدار $f(-3)$ چقدر است؟

۱۸. اگر $f(x) = 1 - 2x$ ، $f(x-1)$ را حساب کنید.

۱۹. اگر $f(x+2) = 3x - 1$ ، $f(x)$ کدام است؟

۲۰. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\text{الف)} \left(-\frac{7}{11}a^3b^2 \right) \left(\frac{33}{5}a^1b^7 \right) \left(-\frac{5}{21}a^5b^{11} \right)$$

$$\text{ب)} \frac{5}{24}a^2b^5c^2 - \frac{1}{18}a^2b^5c^2 + \frac{7}{36}a^2b^5c^2$$

$$\text{ج)} 48a^2b^3c^4 \div (-12)a^{15}b^{25}c^{35}$$

$$\text{د)} 11a^1b^1c^1 + 7a^2b^6 \times 2a^6b^4 - (3a^5b^5)^2$$

$$\text{هـ)} (5a^5b^4c^3)^2 (1a^2b^4c^2)^3 - 500a^{19}b^{20}c^{12}$$

۲۱. درجه‌ی یک جمله‌ای زیر را نسبت به a ، b و c و همچنین نسبت به همه‌ی حروف تعیین کنید.

$$12a^7b^2 \times \frac{3}{4}a^5b^2c^4 \times 2b^4c^6$$

۲۲. کدام یک از عبارات زیر متقارن و کدام یک همگن است؟

$$\text{الف)} 7a^4 - 3a^3b + 7b^4 - 3ab^3$$

$$\text{ب)} x^5 - 2x^2y^2 + y^5 + 12$$

$$\text{ج)} 4x^3y^2 - 2y^5 + 3x^5$$

۲۳. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت زیر بر حسب x و y متقارن باشد.

$$f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - y + (m - 2)x$$

۲۴. اگر $f(n) = \frac{n}{5}f(n+1)$ و $f(6) = \frac{5}{7}f(4)$ ، $f(4)$ را حساب کنید.

۲۵. اگر $f(n) = f(n-1) + 4n^3$ ، حاصل $f(1) - f(-1)$ چیست؟

۲۶. مقدار عددی عبارت $\frac{14x^{100} + 21x^{75}}{2x^{95} + 3x^{70}}$ را به ازای $x = 2$ حساب کنید.

۲۷. اگر $a = b$ نشان دهید:

$$a^2 b^2 (b - a) + b^2 c^2 (c - b) + c^2 a^2 (a - c) = 0$$

۲۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $2a^2 \times (2a)^2 \times 3a^3 \times (3a)^3$

ب) $3ab^2 \times 3(ab)^2 \times (3ab)^2 \times (2a)^2 b$

ج) $(2a^5 b^5)^3 \times (3a^4 b^2)^2$

د) $9a^{12} + 3a^5 \times 5a^6$

هـ) $3a^5 \times 2a^3 \times a^4 + 5a^4 \times 3a^4$

و) $6a^{12} - a^5 (a - 3a)^5$

ز) $(3a^6 b^5 c^2 \times a^2 b^4 c^6 + 2a^3 b^2 c^4 \times 4a^5 b^3 c^4)$

ح) $19a^{22} - [3a^{11} - a^5 (3a^2 - 4a^2)^3]^2$

۲۹. حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $(4a^2 - 3a + 2ab) + (a^2 - 2a + 3ab)$

ب) $(a^4 - 2a^2 + 1) - (a^4 - 3a^2 - 7)$

ج) $4 \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} - 1 \right) - \frac{3}{4} (4a - 2b - 12)$

د) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

هـ) $x + 2(3x^2 - 1) - (2x - 1)(3x + 2)$

و) $a + \frac{2}{3}(3a - 2b - 9) - \frac{3}{4}(2a - 4b - 6)$

ز) $2a^5 - 2a[a - a(1 - a)]^2$

ح) $2(3a - 1)^2 - 3(2a - 1)^2 - 6a^2$

ط) $(2ab^2 - a^2 b)(4a^3 + 3a^2 b + b^3)$

ی) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(4a^3 + b^3)$

$$\text{ک) } 2a^4 - 2(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$\text{ل) } (2x+3)(3x+4)(3x-5)$$

$$\text{م) } 5(a-b)b - 3(a-b)a - (3a^2 - 5b^2)$$

$$\text{ن) } (8a^4b^5 - 12a^6b^3 - 4a^5b^4) \div 4a^2b^2$$

$$\text{س) } 7(a+b)^2 - 7(a-b)^2$$

$$\text{ع) } (a^{18} - a^{12})(a^{18} + a^{12}) - (a^{12} + a^6)(a^{24} - a^{20} + a^{16})$$

$$\text{ف) } x^5 - x(x^2 + x)(x^4 - x^3 + x^2)$$

$$\text{ص) } (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2)$$

$$\text{ق) } a^{10} - (a+b)^2(a^4 - a^2b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)^2$$

$$\text{ر) } 156 \left(x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \right) y - 60 \left(\frac{2y}{3} - \frac{2y}{4} + \frac{2y}{5} \right) x$$

$$\text{ش) } 2x^3 - 2(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 2(x-1) + 2x^2 + 4$$

$$\text{ت) } (a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) - (a+c)(b-d)$$

$$\text{۳.۱. اگر } A = 6a - 2b - 4ab \text{ و } B = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}ab \text{ باشد، حاصل عبارت } \frac{A}{2} - 3B$$

را حساب کنید.

$$\text{۳.۱. مقدار عبارت } A - 2B - 3C \text{ را به ازای } A = 5x^5 - 1 \text{ و } B = 2x^5 - 3$$

$$\text{و } C = \frac{x^5}{3} - 4 \text{ به دست آورید.}$$

$$\text{۳.۲. اگر } A = 2x^3 - 1 \text{ و } B = 2x^3 - 4 \text{ حاصل عبارت } 3A^2 + 3B^2 - 6AB \text{ را پیدا کنید.}$$

۳.۳. درجه‌ی چندجمله‌ای‌های زیر را نسبت به هریک از متغیرهایشان تعیین کنید.

$$\text{الف) } (x^4 - 3x^2 + 5x - x^3)^3 (x^2 + x^5 + 7)^5 + x^{10}$$

$$\text{ب) } (x^2y^3 - x)(xy^2)^3 + (xy)(x^4y^2 + 1)$$

۳۴. ثابت کنید:

$$(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b) \equiv 0$$

۳۵. اگر $A = -m(2x-1)y$ و $B = 4y(1-x)m$ و $C = mx - \frac{1}{4}$ حاصل عبارات

زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 2A - \left(\frac{1}{2}B - 2C \right) \qquad \text{ب) } A - \frac{B}{4} - 4C$$

۳۶. مقادیر a و b و c و d را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای زیر متحد با صفر باشد.

$$(2a-6)x^3 - (a-2b+5)x^2 + (2b-c)x - (2d-2a)$$

۳۷. دو چندجمله‌ای زیر با هم متحدند. مقادیر a و b و c و d را حساب کنید.

$$(a-1)x^3 + (2a-b)x^2 - (a-2b-c)x + (2c-a+d)$$

$$x^3 - 5x + 7$$

فصل پنجم

اتماها

اتماها تساوی‌های جبری هستند که به ازای هر مقدار عددی که به جای متغیرهایشان قرار دهیم همواره برقرار باشند. به عنوان مثال تساوی $x^2 + x = x(x + 1)$ به ازای هر مقدار x برقرار است. لذا یک اتحاد می‌باشد. اما تساوی $2x = x^2 + 1$ فقط به ازای $x = 1$ برقرار است. بنابراین اتحاد نیست.

در واقع تفاوت اتحاد و معادله‌ی جبری در این است که اتحاد به ازای تمام مقادیر برقرار است و معادله‌ی به ازای تعداد محدودی عدد حقیقی برقرار است.

مثال ۱: کدام یک از عبارات زیر اتحاد است؟

الف) $2x(x + 3) = 2x^2 + 30$

ب) $2(3x - 1) = 6x - 2$

حل: 

الف) $2x(x + 3) = 2x^2 + 30 \Rightarrow 2x^2 + 6x = 2x^2 + 30 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$

این تساوی فقط به ازای $x = 5$ برقرار است. بنابراین اتحاد نیست.

$2(3x - 1) = 6x - 2 \Rightarrow 6x - 2 = 6x - 2 \Rightarrow 6x - 6x = -2 + 2 = 0 \times x = 0$

این تساوی به ازای همه‌ی مقادیر x برقرار است. لذا اتحاد است.

مثال ۲: a و b را چنان تعیین کنید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$(a - b)x^2 + 7b(x - 1) + a + c = x^2 - 4x + 3$

حل: 

$$(a-b)x^2 + 2bx - 2b + a + c = x^2 - 4x + 3$$

$$(a-b)x^2 + 2bx + a - 2b + c = x^2 - 4x + 3$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ 2b=-4 \rightarrow b=-2 \\ a-2b+c=3 \end{cases}$$

$$a-b=1 \rightarrow a+2=1 \rightarrow a=-1$$

$$a-2b+c=3 \rightarrow -1+4+c=3 \rightarrow c=0$$

اتحادهای مهم جبری

۱- اتحاد نوع اول: (مربع مجموع دو جمله)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال ۳:

الف) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

ب) $(5x+2xy)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2xy + (2xy)^2 = 25x^2 + 20x^2y + 4x^2y^2$

۲- اتحاد نوع دوم: (مربع تفاضل دو جمله)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال ۴:

الف) $(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3y + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$

ب) $(3x^2-2x)^2 = (3x^2)^2 - 2 \times 3x^2 \times 2x + (2x)^2 = 9x^4 - 12x^3 + 4x^2$

مثال ۵ : در عبارات زیر جاهای خالی را پر کنید تا حاصل مربع یک دو جمله‌ای شود.

الف) $4x^2 - \dots + 9x^2y^2$

ب) $4x^2 - 6xy + \dots$

ج) $x^2y^4z^2 + 3x^2y^2z^2 + \dots$

د) $25a^2x^2 + \dots + b^2$

حل: 

الف) $2 \times 2x \times 3xy = 12x^2y$

ب) $\left(\frac{\frac{1}{2} \times 6xy}{2x}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = \frac{9}{4}y^2$

ج) $\left(\frac{\frac{3}{2}x^2y^2z^2}{xy^2z}\right)^2 = \frac{9}{4}x^2y^2z^2$

د) $2 \times 5ax \times b = 10abx$

۳- اتحاد مربع یک سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال ۴ :

الف) $(a-b+c)^2 = (a+(-b)+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

ب) $(2x-3y+xy)^2 = 4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 - 12xy - 4x^2y + 6xy^2$

ج) $(a^3 + 2a^2 - 2a)^2 = a^6 + 9a^4 + 4a^2 + 6a^5 - 4a^4 - 12a^3$

$$= a^6 + 6a^5 + 5a^4 - 12a^3 + 4a^2$$

مثال ۷ : اگر $a^2 = a + 3$ باشد، نشان دهید $a^5 = 19a + 21$.

حل: 

$$a^5 = a \times a^4 = a \times (a+3)^2 = a(a^2 + 6a + 9) = a(a + 3 + 6a + 9) = a(7a + 12)$$

$$= 7a^2 + 12a = 7(a+3) + 12a = 19a + 21$$

۴- اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

مثال ۸ :

$$\text{الف)} (2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$$

$$\text{ب)} (2x - y)(2x + y) = (2x^2 + y^2) = (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2) = 16x^4 - y^4$$

$$\text{ج)} (x^2 + 1)(1 - x^2) = (1 + x^2)(1 - x^2) = 1 - x^4$$

$$\begin{aligned} \text{د)} (2a^2 - b^2)(6a^2 + 2b^2) &= 2(2a^2 - b^2)(3a^2 + b^2) = 2(9a^4 - b^4) \\ &= 18a^4 - 2b^4 \end{aligned}$$

۵- اتحاد جمله‌ی مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\text{الف)} (x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \times 3 = x^2 + 5x + 6$$

$$\text{ب)} (x - 5)(x + 3) = x^2 + (-5 + 3)x + (-5) \times 3 = x^2 - 2x - 15$$

$$\text{ج)} (5x - 6)(5x + 2) = 25x^2 - 4 \times 5x - 12 = 25x^2 - 20x - 12$$

$$\text{د)} (x^2 - 3)(x^2 - 5) = x^4 - 8x^2 + 15$$

$$\text{هـ)} (3x^2 - 7)(3x^2 + 11) = 9x^4 + 4 \times 3x^2 - 77 = 9x^4 + 12x^2 - 77$$

۶- اتحاد ششم: (مجموع مکعبات دوجمله)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - b^2a + b^3 = a^3 + b^3$$

مثال ۹ :

$$\text{الف)} (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2) = (2a)^3 + b^3 = 8a^3 + b^3$$

$$\text{ب)} (3a^2 + 2b^3)(9a^4 - 6a^2b^3 + 2b^6) = (3a^2)^3 + (2b^3)^3 = 27a^6 + 8b^9$$

۷- اتحاد هفتم: (تفاضل مکعبات دو جمله)

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = [a + (-b)][a^2 - a(-b) + b^2] = a^3 + (-b)^3 = a^3 - b^3$$

مثال ۱۰:

$$\text{الف)} (2a - 5)(4a^2 + 10a + 25) = (2a)^3 - 5^3 = 8a^3 - 125$$

$$\text{ب)} (a^2 - 2a)(a^2 + 2a^2 + 4a^2) = (a^2)^3 - (2a)^3 = a^6 - 8a^3$$

۸- اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

مثال ۱۱:

$$\text{الف)} (2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3 \times (2a)^2 \times 3b + 3 \times 2a \times (3b)^2 + (3b)^3$$

$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$$

$$\text{ب)} (x^2 + 1)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \times 1 + 3 \times x^2 \times 1^2 + 1 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

$$\text{ج)} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

۹- اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = [a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال ۱۲:

$$\text{الف)} (a^2 - 3b^2)^3 = (a^2)^3 - 3(a^2)^2 \times 3b^2 + 3a^2 \times (3b^2)^2 - (3b^2)^3$$

$$= a^6 - 9a^4b^2 + 27a^2b^4 - 27b^6$$

$$\text{ب)} (5a^2 - 2a^3)^3 = (5a^2)^3 - 3 \times (5a^2)^2 \times 2a^3 + 3 \times 5a^2 \times (2a^3)^2 - (2a^3)^3$$

$$125a^6 - 150a^4a^3 + 60a^2a^6 - 8a^9$$

$$\text{ج)} (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

مثال ۱۳: اگر $a + b + c = 0$ ثابت کنید:

حل: 

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^r = (-c)^r \Rightarrow a^r + r a^r b + r a b^r + b^r = -c^r \Rightarrow a^r + b^r + c^r = -r a^r b - r a b^r = r a b (-a - b) = r a b c$$

مثال ۱۴: درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $a^r + b^r = (a + b)^r - r a b$

ب) $a^r + b^r = (a - b)^r + r a b$

ج) $(a + b)^r - (a - b)^r = r a b$

د) $a^r + b^r = (a + b)^r - r a b (a + b)$

هـ) $a^r - b^r = (a - b)^r + r a b (a - b)$

و) $(a + b)^r + (a - b)^r = r a^r + r a b^r$

ز) $a^r + b^r + c^r = (a + b + c)^r - r(a b + a c + b c)$

حل: 

الف) $(a + b)^r = a^r + r a b + b^r \Rightarrow a^r + b^r = (a + b)^r - r a b$

ب) $(a - b)^r = a^r - r a b + b^r \Rightarrow a^r + b^r = (a - b)^r + r a b$

ج) $(a + b)^r - (a - b)^r = (a^r + r a b + b^r) - (a^r - r a b + b^r)$

$$= a^r + r a b + b^r - a^r + r a b - b^r = r a b$$

د) $(a + b)^r = a^r + r a^r b + r a b^r + b^r \Rightarrow a^r + b^r = (a + b)^r - r a^r b - r a b^r$

$$= (a + b)^r - r a b (a + b)$$

هـ) $(a - b)^r = a^r - r a^r b + r a b^r - b^r \Rightarrow a^r - b^r = (a - b)^r + r a^r b$

$$- r a b^r = (a - b)^r + r a b (a - b)$$

و) $(a + b)^r + (a - b)^r = a^r + r a^r b + r a b^r + b^r + a^r - r a^r b + r a b^r - b^r$

$$= r a^r + r a b^r$$

ز) $(a + b + c)^r = a^r + b^r + c^r + r a b + r a c + r b c \Rightarrow a^r + b^r + c^r$

$$= (a + b + c)^r - r a b - r a c - r b c = (a + b + c)^r - r(a b + a c + b c)$$

مثال ۱۵: اگر $x + y = 7$ و $xy = 10$ و $x > y$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $x^2 + y^2$

ب) $x - y$

ج) $x^3 + y^3$

د) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

هـ) $x^4 + y^4$

و) $x^3 - y^3$

حل: 

الف) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 7^2 - 2 \times 10 = 49 - 20 = 29$

ب) $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 29 - 20 = 9 \rightarrow x - y = 3$

ج) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 7^3 - 3 \times 10 \times 7 = 343 - 210 = 133$

د) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = 7 + 2\sqrt{10} \rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$

هـ) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 29^2 - 2 \times 100 = 841$

و) $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 3^3 + 3 \times 10 \times 3 = 27 + 90 = 117$

مثال ۱۶: اگر $a + b + c = 10$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 50$ ، حاصل $ab + ac + bc$ چقدر

است؟

حل: 

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$

$50 = 10^2 - 2(ab + ac + bc) \rightarrow 2(ab + ac + bc) = 50 \rightarrow ab + ac + bc = 25$

مثال ۱۷: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید:

الف) $235^2 - 230^2 - 5^2$

ب) $850^2 - 750^2$

ج) 497×503

د) 99^3

حل: 

الف) $235^2 - 230^2 - 5^2 = (230 + 5)^2 - 230^2 - 5^2 = 230^2 + 2300 + 5^2 - 230^2 - 5^2$

$= 2300$

ب) $850^2 - 750^2 = (850 - 750)(850 + 750) = 100 \times 1600 = 160000$

ج) $497 \times 503 = (500 - 3)(500 + 300) = 500^2 - 3^2 = 250000 - 9 = 249991$

$$\begin{aligned} \text{د) } 99^3 &= (100-1)^3 = 100^3 - 3 \times 100^2 \times 1 + 3 \times 100 \times 1^2 - 1 = 1000000 - 300000 \\ &+ 300 - 1 = 990299 \end{aligned}$$

مثال ۱۸: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(2a+b-5c)(2a+b+5c)$ ب) $(a-b+c)(a+b-c)$

ج) $(a-b-c)(b-a+c)$ د) $(a-3)(a^2+9)(2a+6)$


هـ) $(1+2a)(2a-1)(4a^2+3)$ و) $(2a-5)(2a-1)(4a^2+12a-5)$

ز) $(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

ح) $(a-3)^4$ ط) $(a-1)(a^2+a+1)(a^3+2)$

ی) $(a-1)^6$ ک) $(a-b)^3(a+b)^3$

ل) $(2a-1)^2(2a+1)^2(4a^2+2)^2$

 حل:

الف) $(2a+b-5c)(2a+b+5c) = [(2a+b)-5c][(2a+b)+5c]$

$$= (2a+b)^2 - 25c^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - 25c^2$$

ب) $(a-b+c)(a+b-c) = [a-(b-c)][a+(b-c)] = a^2 - (b-c)^2$

$$= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

ج) $(a-b-c)(b-a+c) = -(a-b-c)(a-b-c) = -(a-b-c)^2$

$$= -(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc) = -a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac - 2bc$$

د) $(a-3)(a^2+9)(2a+6) = 2(a-3)(a+3)(a^2+9) = 2(a^2-9)(a^2+9)$

$$= 2(a^4 - 81) = 2a^4 - 162$$

هـ) $(1+2a)(2a-1)(4a^2+3) = (4a^2-1)(4a^2+3) = 16a^4 + 8a^2 - 3$

و) $(2a-5)(2a-1)(4a^2+12a-5) = (4a^2-12a+5)(4a^2+12a-5)$

$$= [4a^2 - (12a-5)][4a^2 + (12a-5)] = 16a^4 - (12a-5)^2$$

$$= 16a^4 - (144a^2 - 120a + 25) = 16a^4 - 144a^2 + 120a - 25$$

$$\begin{aligned}
 \text{ز) } (a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2) &= (a^3-b^3)(a^3+b^3) \\
 &= a^6-b^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ح) } (a-3)^4 &= [(a-3)^2]^2 = (a^2-6a+9)^2 = a^4+36a^2+81-12a^3+18a^2 \\
 &-108a = a^4-12a^3+54a^2-108a+81
 \end{aligned}$$

$$\text{ط) } (a-1)(a^2+a+1)(a^3+2) = (a^3-1)(a^3+2) = a^6+a^3-2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ی) } (a-1)^6 &= [(a-1)^3]^2 = (a^3-3a^2+3a-1)^2 = a^6+9a^4+9a^2+1-6a^5 \\
 &+6a^4-2a^3-18a^3+6a^2-6a = a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1
 \end{aligned}$$

$$\text{ک) } (a-b)^2(a+b)^2 = [(a-b)(a+b)]^2 = (a^2-b^2)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$$

$$\begin{aligned}
 \text{ج) } (2a-1)^2(2a+1)^2(4a^2+2) &= [(2a-1)(2a+1)(4a^2+2)]^2 = [(4a^2-1)(4a^2+2)]^2 \\
 &= (16a^4+4a^2-2)^2 = 256a^8+16a^4+4+128a^6-64a^4-16a^2 \\
 &= 256a^8+128a^6-48a^4-16a^2+4
 \end{aligned}$$

$$\text{مثال ۱۹: حاصل عبارت } (x+3)(x+4)(x+5)(x+6) - (x^2+9x)^2 - 360 \text{ حساب کنید.}$$

حل: 

$$\begin{aligned}
 &(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) - (x^2+9x)^2 - 360 \\
 &= (x^2+9x+18)(x^2+9x+20) - (x^2+9x)^2 - 360 \\
 &= (x^2+9x)^2 + 38(x^2+9x) + 360 - (x^2+9x)^2 - 360 = 38x^2 + 342x
 \end{aligned}$$

۱۰- اتحاد اولر:

به ازای هر سه عدد حقیقی مانند a ، b و c ثابت کنید:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) &= a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-ca^2 \\
 &+ba^2+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc+ca^2+cb^2+c^3-abc-bc^2-c^2a \\
 &= a^3+b^3+c^3-3abc
 \end{aligned}$$

☆ صورت دیگر اتحاد اولر

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

اثبات:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2]$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

نتیجه: اگر $a+b+c=0$ آن گاه $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ نتیجه: اگر $a=b=c$ آن گاه $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

مثال ۲۰ :

$$\text{الف) } (2x+y+1)(4x^2+y^2+1-2xy-2x-y)$$

$$= (2x)^3 + y^3 + 1 - 3 \times 2x \times y \times 1 = 8x^3 + y^3 - 6xy + 1$$

$$\text{ب) } (a^3 - a^2 - 1)(a^6 + a^4 + 1 + a^5 + a^3 - a^2) = a^9 - a^6 - 1 - 3a^5$$

$$= a^9 - a^6 - 3a^5 - 1$$

مثال ۲۱ مقدار عددی عبارت $a^3 + b^3 + c^3$ را به ازای $a = 3 + \sqrt{2}$ و $b = 3 - \sqrt{2}$ و $c = -6$ حساب کنید.

حل: با توجه به این که $a+b+c$ برابر صفر می شود می توان گفت:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \times (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(-6) = 3 \times (9 - 2)(-6) = -126$$

مثال ۲۲ : معادله ی $(1-x)^3 + (2x+4)^3 - (x+5)^3 = 0$ را حل کنید.

حل: 

$$(1-x)^3 + (2x+4)^3 - (x+5)^3 = (1-x)^3 + (2x+4)^3 + (-x-5)^3 = 0$$

$$(1-x) + (2x+4) + (-x-5) = 0 \Rightarrow (1-x)^3 + (2x+4)^3 + (-x-5)^3$$

$$= 3(1-x)(2x+4)(-x-5) = 0$$

$$1-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \quad 2x+4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \quad -x-5 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-5}$$

مثال ۲۳: اگر $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt{2} - 1$ باشد، مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8$$

حل: 

با توجه به این که $a-b = \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 1$ می توان گفت:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8$$

$$= (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8 = (a^4-b^4)(a^4+b^4)+b^8$$

$$= a^8 - b^8 + b^8 = a^8 = (\sqrt{2})^8 = [(\sqrt{2})^2]^4 = 2^4 = 16$$

مثال ۲۴: مقدار عددی عبارت زیر به ازای $a = 10$ و $b = 7$ چقدر است؟

$$(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)+b^6$$

حل: 

$$(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)+b^6 = a^6 - b^6 + b^6 = a^6 = 10^6 = 1000000$$

مثال ۲۵: نشان دهید عدد $18^2 - 199^2$ بر ۳۱ بخش پذیر است.

حل: 

$$199^2 - 18^2 = (199-18)(199+18) = 181 \times 217 = 181 \times 7 \times 31$$

مثال ۲۶: حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right)$$

حل: 

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right) &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{81}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{6561}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{6560}{6561} \\ &= \frac{3280}{2187} \end{aligned}$$

مثال ۲۷: اگر $x^2 + x + 1 = 0$ حاصل عبارت $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

حل: 

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 = 0 &\rightarrow x + 1 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \times x \times \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = (-1)^3 - 3(-1) = 2 \end{aligned}$$

مثال ۲۸: اگر $a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c = 0$ و n عددی فرد باشد، حاصل عبارت $a^n + b^n + c^n$ را حساب کنید.

حل: 

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0 \text{ یا } c = 0$$

فرض می‌کنیم $a = 0$ باشد.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow b = -c$$

$$a^n + b^n + c^n = 0 + (-c)^n + c^n = -c^n + c^n = 0$$

مثال ۲۹: اگر مجموع دو عدد a و b مقدار ثابتی باشد، ثابت کنید ab وقتی ماکزیمم است که $a = b$.

حل: 

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}(a - b)^2$$

در تساوی فوق ab وقتی حداکثر مقدار خود را داراست که $(a-b)^2$ مینیمم شود.

$$(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$$

-۱۱

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

مثال ۳۰ :

الف) $(2a-1)(16a^4 + 8a^3 + 4a^2 + 2a + 1) = (2a)^5 - 1 = 32a^5 - 1$

ب) $(a^2 - 2b^2)(a^6 + 2a^4b^2 + 9a^2b^4 + 27b^6) = (a^2)^4 - (2b^2)^4 = a^8 - 16b^8$

۱۲- اگر n عددی فرد باشد، آن گاه:

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n$$

مثال ۳۱ :

الف) $(2a+3b)(16a^4 - 24a^3b + 36a^2b^2 - 54ab^3 + 81b^4) = (2a)^5 + (3b)^5$
 $= 32a^5 + 243b^5$

ب) $(a^2+a)(a^8-a^6+a^4-a^2+a^0) = (a^2)^5 + a^5 = a^{10} + a^5$

نکته: همان طور که از مثال های فوق برمی آید به طور کلی می توان گفت:

(۱) $a^n - b^n$ همواره بر $a-b$ بخش پذیر است.

(۲) اگر n عددی زوج باشد $a^n - b^n$ بر $a+b$ بخش پذیر است.

(۳) اگر n عددی فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a+b$ بخش پذیر است.

(۴) $a^n + b^n$ بر $a-b$ بخش پذیر نیست.

۱۳- اتحاد لاگرانژ:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

مثال ۳۲ :

$$(4a^2+b^2)(x^2+9y^2) = (2ax+3by)^2 + (6ay-bx)^2$$

۱۴- تعمیم اتحاد جمله‌ی مشترک:

$$\begin{aligned}
 & (x+a)(x+b)(x+c) \\
 &= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc \\
 & (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \\
 &= x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \\
 &+ (abc+abd+acd+bcd)x + abcd
 \end{aligned}$$

مثال ۳۳ :

$$\begin{aligned}
 & \text{الف) } (x+2)(x+3)(x-4) \\
 &= x^3 + (2+3-4)x^2 + (2 \times 3 + 2 \times (-4) + 3 \times (-4))x + 2 \times 3 \times (-4) \\
 &= x^3 + x^2 - 14x - 24 \\
 & \text{ب) } (x-2)(x+3)(x-4)(x+5) = x^4 + (-2+3-4+5)x^3 \\
 &+ [(-2) \times 3 + (-2)(-4) + (-2) \times 5 + 3 \times (-4) + (3 \times 5) + (-4 \times 5)]x^2 \\
 &+ [(-2) \times 3 \times (-4) + (-2) \times 3 \times 5 + (-2) \times (-4) \times 5 + 3 \times (-4) \times 5]x \\
 &+ (-2) \times 3 \times (-4) \times 5 = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120
 \end{aligned}$$

۱۵- تعمیم اتحاد مربع یک چندجمله‌ای

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + (2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n) \\
 &+ (2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n) + \dots + 2a_{n-1}a_n
 \end{aligned}$$

مثال ۳۴ :

$$\begin{aligned}
 & \text{الف) } (a+b+c+d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad \\
 &+ 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de \\
 & \text{ب) } (a^2 + a^3 - a - 1)^2 = a^6 + a^4 + a^2 + 1 + 2a^5 - 2a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 2a \\
 &= a^6 + 2a^5 - a^4 - 4a^3 - a^2 + 2a + 1
 \end{aligned}$$

۱۶- اتحاد بسط دوجمله‌ای نیوتن

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3$$

$$+ \dots + b^n$$

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3$$

$$+ \dots + (-1)^n b^n$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در جملات بسط، توان a از n شروع و به صفر ختم می‌شود و در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل از درجه‌ی a یکی کم و به درجه‌ی b اضافه می‌شود. بدین ترتیب توان b از صفر شروع و به n ختم می‌شود. ضریب هر جمله به این ترتیب به‌دست می‌آید که ضریب جمله‌ی قبل را در توان a از همان جمله ضرب کرده و بر تعداد جملاتی که تا آن جمله نوشته شده تقسیم می‌کنیم. (توجه: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$)

مثال ۳۵:

$$\text{الف)} \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ب)} \quad (a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$\text{ج)} \quad (2a+b)^5 = (2a)^5 + 5(2a)^4b + 10(2a)^3b^2 + 10(2a)^2b^3 + 5(2a)b^4 + b^5$$

$$= 32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$$

نکاتی درباره‌ی بسط دو جمله‌ای نیوتن

۱) بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ دارای $n+1$ جمله است که برحسب a و b چندجمله‌ای درجه‌ی n متقارن و همگن است.

۲) در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ جمله‌هایی که از دو طرف به یک فاصله‌اند دارای ضریب‌های مساوی می‌باشند.

۳) مجموع ضرایب در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ برابر است با: $(1+1)^n = 2^n$

۴) مجموع ضرایب در بسط دوجمله‌ای $(a-b)^n$ برابر است با: $(1-1)^n = 0$

جدول خیام (پاسکال)

اتحادهای زیر را در نظر بگیرید:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

اگر ضرایب این چندجمله‌ای‌ها را به ترتیب زیر بنویسید شکلی شبیه مثلث ساخته می‌شود که هر عدد این جدول غیر از یک‌ها که در رأس و امتداد ساق‌ها قرار می‌گیرند و ثابت می‌باشند. بقیه‌ی اعداد در واقع برابر مجموع دو عددی است که در سطر بالایی در قسمت چپ و راست آن عدد قرار می‌گیرند.

						۱					
						۱	۱				
					۱	۲	۱				
			۱	۳		۳	۱				
		۱	۴	۶		۴	۱				
	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱					
۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱					

مثال ۳۶: بسط عبارت $(x^3 - 2)^5$ را نوشته و مجموع ضرایب آن را به دست آورید.

حل: 

$$\begin{aligned}
 (x^3 - 2)^5 &= (x^3)^5 - 5(x^3)^4 \times 2 + 10(x^3)^3 \times 2^2 - 10(x^3)^2 \times 2^3 + 5x^3 \times 2^4 - 2^5 \\
 &= x^{15} - 10x^{12} + 40x^9 - 80x^6 + 80x^3 - 32 \\
 \left\{ \begin{aligned} 1 - 10 + 40 - 80 + 80 - 32 &= -1 \\ (1^3 - 2)^5 &= (-1)^5 = -1 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

مثال ۳۷: در بسط عبارت $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3})^5$ مقدار جمله ی گویا چقدر می شود؟

 حل:

در بسط عبارت $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3})^5$ مجموع توان ها همواره برابر ۵ است، پس در جمله ی گویا توان $\sqrt{3}$ باید ۲ و توان $\sqrt[3]{3}$ باید ۳ باشد.

$$10 \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt[3]{3})^3 = 10 \times 3 \times 3 = 90$$

تمرین‌های فصل پنجم

۱. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(5x^3 + 3x^2)^2$

ب) $(2xy^2 + 3x^2y)^2$

ج) $(-a - b)^2$

د) $(2^{1/5} - 2^{0/5})^2$

هـ) $(2a - 3b)(3b - 2a)$

و) $(2a^3 - a)^4$

ز) $(a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2)^2$

ح) $(2 - 3x - 4x^2)^2$

ط) $(2a - 3b - 2ab)^2$

ی) $(a^6 + 2a^2 + 3)^2$

ک) $(2a^3 - 3a^2 + a - 4)^2$

ل) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \dots (a^{32} + b^{32})$

م) $(a^{20} - a^{10})(a^{20} + a^{10})$

ن) $(2a - 3b)(2a + 3b)(4a^2 + 9b^2)$

س) $(ab - a)^2(b + 1)^2(b^2 + 1)^2a^{-2}$

ع) $(a^2 - 2a)^2(a^2 + 2a)^2$

ف) $(a + b - c + d)(a - b - c - d)$

ص) $(a + b - c)^2(a - b + c)^2$

ق) $(a - b + c - d)(d - c - a - b)$

ر) $(2a^3 - a^2 - 3a)(2a^3 + a^2 + 3a)$

۲. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

ب) $(4x^2 - 6x)(4x^4 + 6x^3 + 9x^2)$

ج) $(x + 3)^2(x^2 - 3x + 9)^2$

د) $(2x - 1)^3(4x^2 + 2x + 1)^3$

هـ) $(2x - 7)(2x - 3)$

و) $(3x^2y - 4)(3x^2y + 7)$

ز) $(xy - 3y)^2(xy + 5y)^2$

ح) $(2x^2 + 4)^2(x^2 - 3)^2$

ط) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^3 - 6)$

ی) $(x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^6 + 5)$

$$ک) (-a^{\gamma} - \gamma a)^{\gamma} \quad ج) (a^{\gamma} b^{\delta} - a^{\gamma} b^{\epsilon})^{\gamma}$$

$$م) (x - \gamma y)^{\gamma} (x^{\gamma} + \gamma xy + \epsilon y^{\gamma})^{\gamma} \quad ن) (a^{\gamma} - a)^{\epsilon}$$

$$س) (x - 1)^{\gamma} (x + 1)^{\gamma} (x^{\gamma} - x + 1)^{\gamma} (x^{\gamma} + x + 1)^{\gamma}$$

$$ع) (a^{\gamma} + 1)(a^{\gamma} - \delta)(a^{\epsilon} + \gamma a^{\gamma} + \delta)$$

$$ف) \epsilon(\gamma a - b)^{\gamma} (\gamma a^{\gamma} + b^{\gamma})^{\gamma} \left(a + \frac{1}{\gamma} b \right)^{\gamma}$$

$$ق) (x + 1/\delta)(\epsilon x - \epsilon)(\epsilon x^{\gamma} + \eta)$$

$$ص) (x - y)^{\gamma} (x^{\gamma} + \gamma xy + y^{\gamma})(x^{\gamma} + y^{\gamma})^{\gamma}$$

$$ر) a \left(x + \frac{b + \sqrt{b^{\gamma} - \gamma ac}}{\gamma a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^{\gamma} - \gamma ac}}{\gamma a} \right)$$

$$ش) (x^{\gamma} - \gamma x + 1)(x^{\gamma} + \delta x + 1)$$

$$ت) (a - \gamma)^{\gamma} (a^{\gamma} + \epsilon)^{\gamma} (a^{\epsilon} + 1\epsilon)^{\gamma} (a^{\gamma} + \gamma a + \epsilon)$$

$$ث) x(1-x)(1+x)(x^{\gamma} + x^{\epsilon} + x^{\gamma})$$

$$غ) (y + \gamma)(y - \gamma)(\gamma y^{\epsilon} + \gamma\gamma + \eta y^{\gamma})$$

$$ذ) (a^{\gamma} - b^{\gamma})(a^{\epsilon} + b^{\epsilon} + a^{\gamma} b^{\gamma})(a^{\epsilon} + b^{\epsilon})(a^{\gamma\epsilon} + a^{\gamma} b^{\gamma\epsilon} + b^{\gamma\epsilon})$$

۳. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$الف) (a + b - \gamma)(a^{\gamma} + b^{\gamma} - ab + \gamma a + \gamma b + \epsilon)$$

$$ب) (\gamma x - 1)(\gamma x - \gamma)(\gamma x + \delta)$$

$$ج) (a + 1)(a + \gamma)(a + \gamma)$$

$$د) (a^{\gamma} - b^{\gamma})(a^{\gamma\epsilon} + a^{\gamma} b^{\gamma} + a^{\epsilon} b^{\epsilon} + a^{\epsilon} b^{\gamma} + a^{\gamma} b^{\epsilon} + b^{\gamma\epsilon})$$

$$هـ) (a + b)^{\gamma}$$

$$و) (a - b)^{\gamma}(a + b)^{\gamma}$$

۴. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(3a + 2b)^2 - (3a - 2b)^2$

ب) $(a^4 - 4a^2)(a^4 + a^2) - (a^4 - 2a^2)(a^4 + 2a^2)$

ج) $7(a^6 - a^4)(a^6 + a^4) - 3(a^4 - a^2)(a^8 + a^6 + a^4)$

د) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$

و) $36a^4 - 4(3a^2 - 2b)(3a^2 + b) - 12a^2b$

۵. اگر $a = b + 3$ باشد، نشان دهید: $a^2 - b^2 = 3(a + b)$

۶. اگر $a - 2b = 7$ باشد، حاصل $5a^2 - 20ab + 20b^2$ چقدر است؟

۷. اگر $2x + \frac{2}{x} = 3$ باشد، حاصل $5x^2 + \frac{5}{x^2}$ چقدر می شود؟

۸. اگر $a^2 + ab = 7$ و $a^2 + ab = 9$ باشد، حاصل $(a + b)$ چقدر است؟

۹. حاصل $(\sqrt{5} - 2)^8 (\sqrt{5} + 2)^{10}$ را به دست آورید.

۱۰. مربع عددی را با نه برابر مربع عددی دیگر جمع کردیم. حاصل شش برابر حاصل ضرب همان دو عدد شد. عدد بزرگ تر چند برابر عدد کوچک تر است؟

۱۱. کم ترین مقدار عبارت $x^2 + 10x + 34$ به ازای مقادیر مختلف x چیست؟

۱۲. اولین عدد مجذور کامل بعد از 32^2 چیست؟

۱۳. اگر $a^2 + b^2 = 7ab$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ چقدر است؟ ($a > b > 0$)

۱۴. مربع رقم دهگان به اضافه ۱۶ برابر مربع رقم یکان یک عدد دو رقمی مساوی ۸ برابر حاصل ضرب ارقامش است. نشان دهید این عدد بر ۴۱ بخش پذیر است.

۱۵. اگر $20 = 3a^4 + 3a^2b^2 + 3b^4$ و $10 = a^4 - 7a^2b^2 - 2b^4$ باشد، حاصل

$(2b^2 - 4a^2)^4$ چقدر است؟

۱۶. مجموع دو عدد ۸ و حاصل ضرب آن دو عدد ۱۲ است. مجموع مربعات آن دو عدد چیست؟ مجموع مکعبات دو عدد چه طور؟

۱۷. تفاضل دو عدد ۶ و حاصل ضرب آن‌ها ۹۱ است. مجموع مربعات دو عدد چیست؟

۱۸. اگر $a - b = ۸$ و $ab = ۱۰۵$ باشد، حاصل $a^۳ - b^۳$ چقدر است؟

۱۹. اگر $a + b = ۱۳$ و $ab = ۳۶$ حاصل $a^۴ + b^۴$ چقدر می‌شود؟

۲۰. اگر مجموع دو عدد ۵۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۶ باشد، مجموع معکوس آن‌ها چیست؟

۲۱. مجموع دو عدد ۲۳ و حاصل ضرب دو عدد ۱۲۰ است. تفاضل آن دو عدد چیست؟

۲۲. اگر $x + \frac{1}{x} = ۲$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $x^۲ + \frac{1}{x^۲}$

ب) $x^۲ - \frac{1}{x^۲}$

ج) $۲x^۳ + \frac{۲}{x^۳}$

د) $x^۳ - \frac{1}{x^۳}$

هـ) $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}$

و) $x^۴ + \frac{1}{x^۴}$

۲۳. اگر $A = \overbrace{۹۹۹...۹}^{۲۰}$ مجموع ارقام $A^۲$ را به دست آورید.

۲۴. ثابت کنید اعداد $۱ + n^۲$ و $۲n$ و $n^۲ - ۱$ به ازای هر مقدار $n > ۱$ می‌توانند اندازه‌ی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند.

۲۵. اگر $x = ۲t - ۱$ حاصل $x^۳ - ۳x^۲ + ۲x - ۷$ را بر حسب t به صورت استاندارد بنویسید.

۲۶. اگر $a = \sqrt{۳}$ و $b = \sqrt{۳} - ۲$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $(a+b)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴) + \frac{1}{۲}b^۸$

ب) $(۴a^۲ + ۴ab + ۴b^۲) + ۷b^۳$

۲۷. اگر $a - b = 5$ و $ab = -6$ حاصل $a^3 - b^3$ و $a^2 + b^2$ را حساب کنید.

۲۸. اگر $a + b = 1$ ، ثابت کنید: $a^2(a+1) + b^2(b+1) = 2 - 5ab$.

۲۹. اگر $\frac{x^2}{x^4+1} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^4}{x^8+1}$ را به دست آورید.

۳۰. اگر $x^2 + y^2 = 1$ باشد، ثابت کنید: $x^6 + y^6 = 1 - 3x^2y^2$.

۳۱. اگر $a + b = 3$ ، حاصل عبارات $a^3 + b^3 + 9ab$ و $\frac{a^3 + ab^2 - 9a}{a^2b}$ را به دست آورید.

۳۲. اگر $x^2 + (2a - 6)x + 36$ مربع کامل باشد، مقدار a چقدر است؟

۳۳. در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) $(x + \dots)(\dots - \dots + 4y^2) = x^3 + \dots$

ب) $(\dots + 5b)^3 = 8a^3 + \dots + \dots + 125b^3$

ج) $8x^3 + 1 = (\dots + 1)^3 - 3 \times \dots (2x + \dots)$

د) $4x^2 + \dots = (2x + 3y)^2 - \dots$

۳۴. اگر $x^2 + x + 1 = 0$ ، حاصل $x^{224} - x^{99}$ چقدر است؟

۳۵. اگر $x^2 - x + 1 = 0$ باشد، حاصل $x^{2000} + x^{1420} + x^{1378} + x^2 + 1$ را حساب کنید.

۳۶. ثابت کنید عدد 100020001 مربع کامل است.

۳۷. ثابت کنید عدد 1000030000300001 مکعب کامل است.

۳۸. ثابت کنید عدد $25377 - 161999 + 41378$ مربع کامل است.

۳۹. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که عبارت زیر مکعب کامل باشد.

$$64x^3 - (7a+b)x^2 + 2ax - 1$$

۴۰. اگر $(x+y)(x^2-xy+y^2)=2$ باشد، حاصل $\frac{x^3y^3}{x^9+y^9-8}$ را حساب کنید.

۴۱. اگر $x - \frac{1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ باشد، مقدار $x^2 + x^{-2}$ را به دست آورید.

۴۲. اگر $a^2 + b^2 = 1$ ، ثابت کنید: $2(a^4 + b^4) - 2(a^6 + b^6) = 1$

۴۳. اگر $a^2 = 2a + 1$ ، ثابت کنید: $a^5 = 29a + 12$

۴۴. اگر $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$ ، ثابت کنید $a = b = c$

۴۵. مقادیر x و y را در تساوی زیر به دست آورید.

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 9 = 0$$

۴۶. اگر $x^2 - tx + 1 = 0$ باشد، حاصل عبارت زیر را بر حسب t به دست آورید.

$$x^4 + 2x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

۴۷. $a = \sqrt{3} + \sqrt{8}$ و $b = \sqrt{3} - \sqrt{8}$ باشد، حاصل ab و $a^2 + b^2$ و $a - b$ را حساب کنید.

۴۸. ثابت کنید:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b + 2a^2c + 2b^2a + 2b^2c + 2c^2a + 2c^2b + 6abc$$

۴۹. اگر $x = 20$ و $y = 15$ ، مقدار عددی عبارت $(x+y)(x^2+y^2) + \frac{1}{6}y^4$ را حساب کنید.

۵۰. اگر $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x + 1 = 0$ ، حاصل $x + y$ چقدر است؟

۵۱. مقادیر x ، y و z را در تساوی زیر به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 29 = 0$$

۵۲. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$70^2 - 69^2 + 68^2 - 67^2 + 66^2 - 65^2 + \dots + 10^2 - 9^2$$

۵۳. اگر $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{4}$ ، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{x^2}{x^4 + 1}$

(ب) $\frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

۵۴. اگر $x^3 - y^3 = 7$ و $x - y = 1$ ، حاصل $x^2 + y^2$ را حساب کنید.

۵۵. اگر $a = \sqrt{5} - 2$ و $b = \sqrt{5} + 2$ و $c = -2\sqrt{5}$ باشد، حاصل $a^3 + b^3 + c^3$ چقدر است؟

۵۶. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(2x - 6)^3 + (3x - 6)^3 - (5x - 12)^3 = 0$$

۵۷. اگر $a^2 + b^2 = 3ab$ باشد، مقدار عددی $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4$ و $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3}$ را حساب کنید.

۵۸. در هریک از تساوی‌های زیر مقادیر مجهول را حساب کنید.

(الف) $x^2 + y^2 + z^2 + 75 = 10(x + y + z)$

(ب) $5x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 16x + 54z + 97 = 0$

۵۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به زاویه‌ی قائمه‌ی A رابطه‌ی $a^2 = 2bc$ برقرار است. ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است.

۶۰. اگر $a > 1$ و $a^2 + \frac{1}{a} = 7$ باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $a^3 - \frac{1}{a^3}$

(ب) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

(ج) $a^9 + \frac{1}{a^9}$

(د) $a^4 + a^{-4}$

۶۱. در تساوی‌های زیر مقادیر مجهول را حساب کنید.

الف) $(x^2 - 2x + 1)^{17} + (4x^2 + 4xy + y^2)^{19} + (x^2 + y^2 - z)^{20} = 0$

ب) $4(x^2 + z^2 - xz) + 9(y^2 + 1) - 12(y + z) + 7 = 0$

۶۲. مقدار z را در تساوی زیر به دست آورید.

$$(x^3 - \sqrt{2})^{10} + (x^{18} - 4y)^{20} + (x^6 + y^2 - z)^{30} = 0$$

۶۳. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{10}}\right)$$

۶۴. حاصل عبارت زیر را به ازای $x = 2$ به دست آورید.

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^9})$$

۶۵. اگر $2x^2 - x + 2 = 0$ مقدار عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

ب) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

ج) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

د) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

۶۶. اگر $\frac{x^4}{x^4 + 1} = 0/1$ و $x > 0$ باشد، حاصل عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ را حساب کنید.

۶۷. ثابت کنید حاصل ضرب چهار عدد طبیعی متوالی به اضافه‌ی ۱ مربع کامل است.

۶۸. اگر $7a^2 + 7b^2 = 13$ و $7a^2 + 9a^2 + 7b^2 + 36 = 24ab$ باشد، حاصل $(4a - 3b)^4$ را حساب کنید.

۶۹. از رابطه‌ی $2(xy + yz + zu) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + u^2$ نتیجه بگیرید:

$$x = y = z = u$$

۷۰. با شرط $2(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3$ ، حال عبارت $a^{10} + b^{20} + c^{30}$ چقدر

است؟

۷۱. چند جمله‌ای زیر را بر حسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

$$x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 72x + 45$$

۷۲. مقادیر a ، b و c را چنان تعیین کنید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$$ax^3 + (x+2)^2 + c - bx^2 - 4x = x^3 + 2x^2 + 4$$

۷۳. اگر $A = x^2 + 2x$ و $B = x^2 - x$ و $C = x(x^2 + x - 7)$ ، حاصل عبارت

$$A^2 + B^2 - 2C$$

را حساب کنید.

۷۴. اگر $a - b = 1$ و $a^2 + b^2 = 4$ ، حاصل $a + b$ را به دست آورید.

۷۵. اگر $a^2 + b^2 + ab = b - a - 1$ باشد، ثابت کنید: $a^{101} + b^{101} = 0$.

۷۶. اگر $a - b = 1$ ، نشان دهید: $a^2 + 2b^2 + 2ab + b + \frac{1}{4} = 0$.

۷۷. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر وتر آن ۱۲ سانتی‌متر است. طول وتر مثلث را حساب کنید.

۷۸. اگر $2x^2 + 3xy + y^2 = 0$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ چیست؟

۷۹. اگر $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ و $a + b + c = 1$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ثابت کنید:

$$xy + xz + yz = 0$$

۸۰. اگر $A + B + C = 1$ و $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 0$ ، ثابت کنید: $A^2 + B^2 + C^2 = 1$

۸۱. نشان دهید عبارت زیر هیچ‌گاه منفی نیست.

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2(x - y) + 3$$

۸۲. اگر $x + y = 4$ و $xy = -1$ ، حاصل عبارت $15x^2 + 9y^2$ را با شرط $x > y$ به دست آورید.

۸۳. اولاً صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

ثانیاً: اگر $a + b + c = ۱۲$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $ab + bc + ca$ چقدر است؟

$$(a + b + c)^2 = \frac{1}{4}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] + 3(ab + bc + ca)$$

۸۴. دو عدد طبیعی بیابید که مجموع آن‌ها ۱۷ و حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

۸۵. مجموع مربعات سه مضرب متوالی عدد ۵ برابر ۳۵۰ شده است. آن سه عدد کدامند؟

۸۶. مجموع دو عدد یک و حاصل ضربشان $\frac{2}{9}$ است. مجموع مربعات و مجموع مکعبات آن دو

عدد چیست؟

۸۷. اگر $xy + yz + xz = ۵$ و $x + y + z = ۱۰$ باشند، حاصل عبارت $x^2 + y^2 + z^2$ را حساب کنید.

۸۸. اگر $a^2 + b^2 - ۶ab = ۰$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ را حساب کنید. ($a > b > ۰$)

۸۹. اگر $\frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را حساب کنید.

۹۰. اگر $a + b + c = ۰$ و $a^2 + b^2 + c^2 = ۱$ ، حاصل $a^4 + b^4 + c^4$ را به دست آورید.

۹۱. اگر $\sqrt{xyz} = ۶$ ، $x(1+y) + y(1+z) + z(1+x) = ۶$ ، ثابت کنید: $xyz = ۱$ (x و y و z اعداد حقیقی مثبت هستند).

راهنمایی: عبارت فوق را به صورت مجموع سه مربع کامل متحد با صفر تبدیل کنید.

۹۲. اگر $a = x - 3m$ ، $b = x - m$ ، $c = x + m$ و $d = x + 3m$ باشند، ثابت کنید

عبارت زیر مربع کامل است. $abcd + (b - c)^4$

۹۳. اگر $a - b = ۰/۱$ ، ثابت کنید:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8) = ۱/a^{16} - ۱/b^{16} \quad (\text{الف})$$

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n = ۱/a^{n+1} - ۱/b^{n+1} \quad (\text{ب})$$

۹۴. اگر $a + b - c = 1$ باشد، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c$$

۹۵. ثابت کنید:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2[(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b)]$$

۹۶. اگر $a + b + c = 0$ ، ثابت کنید:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

۹۷. اگر $a + b + c = 4$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ و $abc = 12$ باشد، حاصل عبارت زیر را

حساب کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 \text{ (الف)}$$

۹۸. اگر $x + y + z = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ باشد، حاصل $x^4 + y^4 + z^4$ را حساب کنید.

۹۹. اگر $x = b + c - 2a$ و $y = c + a - 2b$ و $z = a + b - 2c$ ، حاصل عبارت $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ چقدر است؟

۱۰۰. ده نفر در مسابقه‌ی تنیس روی میز شرکت کرده‌اند. هر دو نفر از آن‌ها بین خودشان یک مسابقه انجام داده‌اند. اولین بازیکن x_1 برد و y_1 باخت. دومین بازیکن در طول مسابقات x_2 برد و y_2 باخت و ... و دهمین بازیکن x_{10} برد و y_{10} باخت داشته‌اند. ثابت کنید:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_{10}^2.$$

👉 فصل ششم

تجزیه‌ی عبارات جبری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری یعنی آن عبارت را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری با ضرایب صحیح تبدیل کنیم. عباراتی مانند $x + y$ و $2x + 3y + 1$ و $x^2 + 1$ را نمی‌توان به حاصل ضرب عبارات جبری با ضرایب صحیح تبدیل کرد. اما عبارت جبری $x^2 + x$ و $y^2 - 4x^2$ و $a^2 - 2ab + b^2$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب عبارات جبری دیگر نوشت که چگونگی آن را توضیح می‌دهیم.

روش‌های گوناگون تجزیه

۱- تجزیه به کمک فاکتورگیری:

در این روش از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک جملات جبری فاکتور می‌گیریم.

مثال ۱:

الف) $2ab + 3b = b(2a + 3)$

ب) $5a^2b^3 + 10a^3b^2 = 5a^2b^2(b + 2a)$

ج) $18a^4b^2c^4 + 12a^2b^4c^4 + 24a^4b^2c^2 = 6a^2b^2c^2(3a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4a^2b^2)$

د) $4a^2(a + b) + 8a(a + b) = 4a(a + b)(a + 2)$

هـ) $2(a - b)^2 - (a - b) = (a - b)[2(a - b) - 1] = (a - b)(2a - 2b - 1)$

۲- روش دسته‌بندی و فاکتورگیری:

اگر تمام جمله‌های موجود در یک عبارت دارای عامل مشترک نباشند، جملات را دسته‌بندی کرده و در هر دسته از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم، به طوری که در مرحله‌ی بعد نیز فاکتور مشترکی ظاهر شود.

مثال ۲:

$$\text{الف) } ac + bc + ad + bd = (ac + ad) + (bc + bd)$$

$$= a(c + d) + b(c + d)$$

$$= (c + d)(a + b)$$

$$\text{ب) } ac - bc + ad - bd = a(c + d) - b(c + d)$$

$$= (c + d)(a - b)$$

$$\text{ج) } ۴ax + ۹ay - ۲bx - ۶by = ۳a(۲x + ۳y) - ۲b(۲x + ۳y)$$

$$= (۲x + ۳y)(۳a - ۲b)$$

$$\text{د) } a^5 - a^۴ + a^۳ - a^۲ = (a^5 - a^۴) + (a^۳ - a^۲) = a^۴(a - ۱) + a^۲(a - ۱)$$

$$= (a - ۱)(a^۴ + a^۲) = a^۲(a - ۱)(a^۲ + ۱)$$

۳- تجزیه به کمک اتحادهای اول و دوم:

یادآوری می‌کنیم که:

$$a^۲ + ۲ab + b^۲ = (a + b)^۲$$

$$a^۲ - ۲ab + b^۲ = (a - b)^۲$$

مثال ۳:

$$\text{الف) } x^۲ + ۶x + ۹ = (x + ۳)^۲$$

$$\text{ب) } ۲۵a^۲ - ۳۰ab + ۹b^۲ = (۵a - ۳b)^۲$$

$$\text{ج) } ۴x^۲ + ۱۲xy + ۹y^۲ = (۲x + ۳y)^۲$$

$$\text{د) } ۲x - x^۲ - ۱ = -(x^۲ - ۲x + ۱) = -(x - ۱)^۲$$

۴- تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

یادآوری می‌کنیم که:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال ۴:

الف) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

ب) $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$

ج) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

د) $(2a + b)^2 - 25 = (2a + b - 5)(2a + b + 5)$

هـ) $1 - (2x - 3)^2 = [1 - (2x - 3)][1 + (2x - 3)]$
 $= (1 - 2x + 3)(1 + 2x - 3)$
 $= (4 - 2x)(2x - 2)$
 $= 4(2 - x)(x - 1)$

و) $(4x + 3)^2 - (3x - 1)^2 = [(4x + 3) - (3x - 1)][(4x + 3) + (3x - 1)]$
 $= (4x + 3 - 3x + 1)(4x + 3 + 3x - 1)$
 $= (x + 4)(7x + 2)$

۵- تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک:

یادآوری می‌کنیم که:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

مثال ۵:

الف) $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

ب) $x^2 - 7x - 60 = (x - 12)(x + 5)$

ج) $4x^2 - 20x + 21 = (2x)^2 - 10 \times (2x) + 21 = (2x - 3)(2x - 7)$

د) $9x^2 - 9xy - 10y^2 = (3x)^2 - 3y \times (3x) - 10y^2 = (3x + 2y)(3x - 5y)$

هـ) $25x^2 - 5x - 42 = (5x - 7)(5x + 6)$

و) $(x - 2y)^2 - (x - 2y) - 20 = (x - 2y - 5)(x - 2y + 4)$

در صورتی که ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم مجذور کامل نباشد سه جمله‌ای را در ضریب درجه‌ی ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم تا ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم مجذور کامل شود. سپس از اتحاد جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم.

مثال ۴ :

$$\begin{aligned} \text{الف) } 2x^2 + 7x + 3 &= \frac{1}{2}(4x^2 + 7 \times 2x + 6) \\ &= \frac{1}{2}(2x + 1)(2x + 6) \\ &= (2x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 6x^2 - x - 1 &= \frac{1}{6}(36x^2 - 6x - 6) \\ &= \frac{1}{6}(6x - 3)(6x + 2) = \frac{1}{6} \times 3(2x - 1) \times 2 \times (3x + 1) \\ &= (2x - 1)(3x + 1) \end{aligned}$$

۶- تجزیه به کمک اتحادهای تفاضل مکعبات و مجموع مکعبات دو جمله:

یادآوری می‌شود که:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال ۷ :

$$\text{الف) } 8a^3 + b^3 = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\text{ب) } 27a^3 - 1 = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$$

$$\text{ج) } 64a^3 - 27 = (4a - 3)(16a^2 + 12a + 9)$$

$$\text{د) } a^3 + 125 = (a + 5)(a^2 - 5a + 25)$$

۷- تجزیه با افزودن و کاستن:

در این روش جمله‌ای را به عبارت جبری اضافه و از آن کم می‌کنیم. سپس به کمک اتحادها عبارت جبری را تجزیه می‌کنیم.

مثال ۸ :

$$\text{الف) } x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$\text{ب) } a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$\text{ج) } a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2b^2c^2$$

$$= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 2b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$$

$$= [a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc)] [a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)]$$

$$= [a^2 - (b + c)^2] [a^2 - (b - c)^2]$$

$$= (a - b - c)(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

$$\text{د) } a^{10} + a^5 + 1 = (a^{10} + a^9 + a^8) - (a^9 + a^8 + a^7) + (a^7 + a^6 + a^5)$$

$$- (a^6 + a^5 + a^4) + (a^4 + a^3 + a^2) - (a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)$$

$$= a^8(a^2 + a + 1) - a^7(a^2 + a + 1) + a^5(a^2 + a + 1) - a^4(a^2 + a + 1)$$

$$+ a^3(a^2 + a + 1) - a(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$$

۸- تجزیه‌های ترکیبی:

در این نوع تجزیه‌ها از برخی از روش‌های قبلی توأماً استفاده می‌کنیم.

مثال ۹ :

$$\text{الف) } 8x^2 + 8x + 2 = 2(4x^2 + 4x + 1) = 2(2x + 1)^2$$

$$\text{ب) } 20x^2 - 100x + 125 = 5(4x^2 - 20x + 25) = 5(2x - 5)^2$$

$$\text{ج) } 3x^2 - 27y^2 = 3(x^2 - 9y^2) = 3(x - 3y)(x + 3y)$$

$$\text{د) } 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 4(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{هـ)} \quad x^2 - y^2 - 2x + 1 &= (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 \\ &= (x - 1 - y)(x - 1 + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{و)} \quad x^2 - y^2 + 2y - 1 &= x^2 - (y^2 - 2y + 1) = x^2 - (y - 1)^2 \\ &= [x - (y - 1)][x + (y - 1)] = (x - y + 1)(x + y - 1) \end{aligned}$$

$$\text{ز)} \quad 5x^2 - 40x + 75 = 5(x^2 - 8x + 15) = 5(x - 3)(x - 5)$$

$$\begin{aligned} \text{ح)} \quad 50x^2 - 30xy - 56y^2 &= 2(25x^2 - 15xy - 28y^2) \\ &= 2[(5x)^2 - 3y(5x) - 28y^2] \\ &= 2(5x - 7y)(5x + 4y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ط)} \quad (x + 1)^2 - 13x - 61 &= (x + 1)^2 - 13x - 13 - 48 \\ &= (x + 1)^2 - 13(x + 1) - 48 \\ &= (x + 1 - 16)(x + 1 + 3) \\ &= (x - 15)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ی)} \quad x^2 - 10x^2 + 9 &= (x^2 - 1)(x^2 - 9) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ک)} \quad (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 &= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \\ &= (x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\text{ج)} \quad a^2 - b^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{م)} \quad x^2 + 4x^2y^2 + 16y^2 &= (x^2 + 4x^2y^2 + 16y^2) - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 4y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 4y^2 - 2xy)(x^2 + 4y^2 + 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ن)} \quad a^2 + b^2 - a^2 + ab - b^2 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2) \\ &= (a^2 - ab + b^2)(a + b - 1) \end{aligned}$$

۹- تجزیه به کمک اتحاد اولر و نتایج آن:

یادآوری:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 2abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2] \end{aligned}$$

حالت‌های خاص:

$$a = b = c \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

مثال ۱۰:

$$\text{الف)} \quad 8x^3 + y^3 + 1 - 6xy = (2x + y + 1)(4x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - y)$$

$$\text{ب)} \quad a^3 + (2-a)^3 - 8 = 3a(2-a)(-2) = 6a(a-2)$$

$$\text{ج)} \quad (2a-b)^3 - (a-b)^3 - a^3 = (2a-b)^3 + (b-a)^3 + (-a)^3 \\ = 3(2a-b)(b-a)(-a) = 3a(2a-b)(a-b)$$

$$\text{د)} \quad (a-b)^3 + (b-c)^3 - (a-c)^3 = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \\ = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

۱۰- تجزیه به کمک اتحادهای:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ فرد است})$$

مثال ۱۱:

$$\text{الف)} \quad a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

$$\text{ب)} \quad a^5 + 32 = (a+2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)$$

مثال ۱۲: جملات جبری زیر را تجزیه کنید:

$$\text{الف)} \quad ab(a-b) + bc(b-c) + ac(c-a)$$

$$\text{ب)} \quad (x+2)(x+3)(x+5)(x+4) - 120$$

$$\text{ج)} \quad (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

$$\text{د)} \quad (a-b-c)^3 + (2b-a-c)^3 + (2c-b)^3$$

$$\text{هـ)} \quad y^3(a-x) - x^3(a-y) + a^3(x-y)$$

حل: 

$$\text{الف)} \quad ab(a-b) + bc(b-c) + ac(c-a)$$

$$= a \underbrace{b - ab + b^2 c - bc^2}_{+ac} + ac(c - a)$$

$$= b(a^2 - c^2) - b^2(a - c) - ac(a - c)$$

$$(a - c)(\underbrace{ba + bc - b^2}_{-ac}) = (a - c)[b(a - b) - c(a - b)]$$

$$= (a - c)(a - b)(b - c)$$

$$\text{ب) } (x + 2)(x + 3)(x + 5)(x + 4) - 120$$

$$= [(x + 2)(x + 5)][(x + 3)(x + 4)] - 120$$

$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 120$$

$$= (x^2 + 7x)^2 + 22(x^2 + 7x) + 120 - 120$$

$$= (x^2 + 7x)^2 + 22(x^2 + 7x) = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 22)$$

$$= x(x + 7)(x^2 + 7x + 22)$$

$$\text{ج) } (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = [(a + b + c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3)$$

$$= (a + b + c - a)[(a + b + c)^2 + a(a + b + c) + a^2] - (b + c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$= (b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + a^2 + ab + ac + a^2 - b^2 + bc - c^2)$$

$$= (b + c)(3a^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = 3(b + c)(a^2 + ab + ac + bc)$$

$$= 3(b + c)[a(a + b) + c(a + b)] = 3(b + c)(a + b)(a + c)$$

$$\text{د) } (a - b - c)^3 + (2b - a - c)^3 + (2c - b)^3$$

$$= 3(a - b - c)(2b - a - c)(2c - a)$$

با توجه به این که:

$$(a - b - c) + (2b - a - c) + (2c - b) = 0$$

$$\text{هـ) } y^3(a - x) - x^3(a - y) + a^3(x - y)$$

$$= y^3 \underbrace{a - y}_{x - x} + x^3 \underbrace{a - x}_{y - y} + a^3(x - y)$$

$$= -a(x^3 - y^3) + xy(x^2 - y^2) + a^3(x - y)$$

$$= (x - y)[-a(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) + a^3]$$

$$\begin{aligned}
 &= (x - y)[\underbrace{-ax^2 - axy - ay^2 + x^2y + xy^2 + a^2}_{(x^2(y-a) + xy(y-a) - a(y^2 - a^2))}] \\
 &= (x - y)[x^2(y - a) + xy(y - a) - a(y^2 - a^2)] \\
 &= (x - y)(y - a)[\underbrace{x^2 + xy - ay - a^2}_{(x - a)(x + a) + y(x - a)}] \\
 &= (x - y)(y - a)[(x - a)(x + a) + y(x - a)] \\
 &= (x - y)(y - a)(x - a)(x + a + y)
 \end{aligned}$$

۱۱- تجزیه به کمک شکستن برخی از جملات:

در این روش بعضی از جملات را به صورت مجموع یا تفاضل دو جمله‌ی دیگر می‌نویسیم. سپس به روش بسته‌بندی و فاکتورگیری عبارت جبری را تجزیه می‌کنیم.

مثال ۱۳ :

$$\begin{aligned}
 \text{الف) } 2x^2 + 5x - 3 &= 2x^2 - x + 6x - 3 \\
 &= x(2x - 1) + 3(2x - 1) \\
 &= (2x - 1)(x + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب) } 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3 &= 2x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 3x + 2x - 3 \\
 &= x^2(2x - 2) - x(2x - 2) + (2x - 2) \\
 &= (2x - 2)(x^2 - x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ج) } a^5 - 2a^2 + 1 &= a^5 - a^2 - a^2 + 1 = a^2(a^3 - 1) - (a^2 - 1) \\
 &= (a - 1)[a^2(a^2 + a + 1) - (a + 1)] = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 - a - 1)
 \end{aligned}$$

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2) \quad \text{مثال ۱۴: ثابت کنید:}$$

 حل:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^4 - (a - b)^4 &= [(a + b)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 + (a - b)^2] \\
 &= 4ab \times (2a^2 + 2b^2) = 8ab(a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

مثال ۱۵: ثابت کنید:

$$(a + b)(a + 2b)(a + 3b)(a + 4b) + b^4 = (a^2 + 5ab + 5b^2)^2$$

حل: 

$$\begin{aligned}
 & (a+b)(a+4b)(a+2b)(a+3b)+b^4 \\
 &= (a^2+5ab+4b^2)(a^2+5ab+6b^2)+b^4 \\
 &= (a^2+5ab)^2+10b^2(a^2+5ab)+25b^4=(a^2+5ab+5b^2)^2
 \end{aligned}$$

مثال ۱۶: اگر $a^2+b^2+c^2=10$ ، مقدار عددی $(2a+2b)^4 - 2(ac+bc+c^2)+c^2$ را به دست آورید.

حل: 

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)^2-2(ac+bc+c^2)+c^2=10 \\
 & [(a+b+c)-c]^2=10 \rightarrow (a+b)^2=10 \\
 & 2^2 \times (a+b)^2=4 \times 10 \Rightarrow (2a+2b)^2=40
 \end{aligned}$$

تمرین‌های فصل هشتم

۱. چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $۳۵a^۳b - ۷۷a^۲b + ۱۴ab$

ب) $۴a^۲b(a+b) + ۲ab^۲(a+b)$

ج) $۲۵a^۲ + ۳۰a^۳ - ۳۵a^۴$

د) $۸ax - bx + ۸ay - by$

هـ) $a^۳ - ۲a + a^۲ - ۲$

و) $x^۲ + ax + ab + bx$

ز) $۹a^۲ + ۱۲ab + ۴b^۲$

ح) $(a-b)^۲ + ۲(b-a) + ۱$

ط) $a^۸ + ۶a^۴ + ۹$

ی) $۵b^۴ + ۱۰b^۲ + ۵$

ک) $a^۸ - ۳۲a^۴ + ۲۵۶$

ل) $۱۶x^۴ - ۶۲۵$

م) $۱۲۱a^۳x - ۴۹ax^۳$

ن) $۲ - ۲(x-۳)^۲$

س) $(x+۱)^۴ - (x-۱)^۴$

ع) $۳x^۵ - ۴۸xy^۴$

ف) $b^۲y - b^۲ - a^۲y + a^۲$

ص) $۴x^۲ + ۲x - ۹y^۲ - ۳y$

ق) $x^۲ + ۱۰y - y^۲ - ۲۵$

ر) $x^۴ - x^۳ - x^۲ + ۲x - ۱$

ش) $(a^۲ + b^۲)^۲ - ۴a^۲b^۲$

ت) $۱ - ۴x^۲ - y^۲ - ۴xy$

۲. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^۲ - ۱۹x + ۴۸$

ب) $۱۰۰x^۲ + ۴۰x - ۲۱$

ج) $x^۴ - ۱۷x^۲ + ۱۶$

د) $۱۶x^۴ - ۵۲x^۲ + ۳۶$

هـ) $x^۶ - ۷x^۳ - ۸$

و) $a^۴ + a^۳ + a^۲ - ۲a - ۳$

ز) $x^۴ - ۱۰x^۲y^۲ + ۹y^۴$

ح) $(x^۲ + ۳x)^۲ - ۲(x^۲ + ۳x) - ۸$

ط) $x^۷ + x^۶ + x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱$

$$\text{ی) } (x^2 - 5x)^2 - 36$$

$$\text{ک) } (18a^3 + 4b^3)^2 - (9a^3 - 6b^3)^2 \quad \text{ج) } (x^5 - 1) - x^2(x - 1)$$

$$\text{م) } (x^4 + x^2 + 1)^2 - 24x^4 - 24x^2 + 39$$

$$\text{ن) } 5x^5 - 5x(25x^2 - 144)$$

$$\text{س) } 11x^2 + 15x - 14$$

$$\text{ع) } x^4 + y^4 - 11x^2y^2$$

$$\text{ف) } 4x^4 - 5x^2y^2 + y^4$$

$$\text{ص) } x^4 - 47x^2y^2 + y^4$$

$$\text{ق) } a^3 - 27b^3$$

$$\text{ر) } 16a^3 - 54$$

$$\text{ش) } a^6 - b^6$$

$$\text{ت) } a^9 - b^9$$

۳. عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } (x + y + 1)^2 - x - y - 3$$

$$\text{ب) } 4a^2 + 9b^2 + 12ab - 2a - 3b - 12$$

$$\text{ج) } (x^2 - 3x)^2 - 14(x^2 - 3x) + 40$$

$$\text{د) } (a + b)^2 - 5a - 6b + 4$$

$$\text{هـ) } a^4 - 5a^2 + 4$$

$$\text{و) } x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$$

$$\text{ز) } x^5 + x^4 - 16x^3 - 16$$

$$\text{ح) } x^4 + x^2 + 1$$

$$\text{ط) } a^3 + a - 10$$

$$\text{ی) } 3x^3 - 5x + 2$$

$$\text{ک) } a^2 - c^2 - 2(ad - bc) - b^2 + d^2 \quad \text{ج) } ax^3 + x^2 + x + 1 - a$$

$$\text{م) } 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \quad \text{ن) } 8a^3 + b^3 - 4a^2b - 2ab^2$$

$$\text{س) } (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$$

$$\text{ع) } x^3 + 3x^2 + 5x + 6$$

۴. عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } (x^4 + 36)^2 - 25x^2(x^4 + 36) + 156x^4$$

$$\text{ب) } x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 3$$

$$\text{ج) } x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 \quad \text{د) } x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$$

$$\text{هـ) } xy^2 - xz^2 + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2$$

$$\text{و)} a^2b^2(b-a) + b^2c^2(c-b) + c^2a^2(a-c)$$

$$\text{ز)} (a^2-b^2)^2 - (c^2-b^2)^2 + (c^2-a^2)^2$$

$$\text{ح)} x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$$

$$\text{ط)} x^2 + 4y^2 - 5x + 10y - 4xy - 24$$

$$\text{س)} (a+b)^2 + (a-b)^2 - (a^2-b^2)^2 - 1$$

$$\text{ک)} 4(ad+bc)^2 - (a^2-b^2-c^2+d^2)^2$$

$$\text{ج)} 8x^2 - y^2 - 1 - 6xy$$

$$\text{د)} 2a^2(b^2+c^2) - b^2(2c^2+b^2) - (a^2+c^2)$$

$$\text{م)} a^{10} + a^2 + 2$$

$$\text{ن)} y(x-2z)^2 + 8xyz + x(y-2z)^2 - 2z(x+y)^2$$

$$\text{س)} a^3 - 7a^2 + 7a + 15$$

$$\text{ف)} (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\text{ع)} 9x^2 + 3(3y-1)x + (2y+1)(y-2)$$

$$\text{ق)} (a^2-b^2)x^2 + 2(ad-bc)x + d^2-c^2$$

$$\text{ص)} (a+b+c)(ab+ac+bc) - abc$$

$$\text{ش)} (a^2-b^2)^2 - (c^2-b^2)^2 + (c^2-a^2)^2$$

$$\text{ر)} (ax-by)^2 - (ay-bx)^2$$

۵. مقدار عددی عبارت $5 - 30x^6 - 60x^{12} + 40x^{18}$ را به ازای $x = 2$ به دست آورید.

۶. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = 3 \times 5 \times 17 \times \dots \times (1 + 2^{64})$$

۷. اگر $10 = a - b$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} 8a^2 - 12a^2b + 6ab - b^2 \quad \text{ب)} b^2 + 2a^2 - 4ab + 2b - 2a + 1$$

۸. ثابت کنید عبارت زیر به ازای هر مقدار x نامنفی است:

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$$

۹. اگر $x = a + 2b - 3c$ و $y = 2a + 4b - c$ باشد، ثابت کنید:

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = -125c^3$$

۱۰. ثابت کنید:

$$(a+b+c)^3 + 3(b+c)^2(a+b+c) - 2(b+c)(a+b+c)^2 - (b+c)^3 = a^3$$

۱۱. ثابت کنید:

$$(a+b+1)^2 + b^2 - 2b(a+b+1) = (a+1)^2$$

۱۲. اگر $a+b+c=0$ ، ثابت کنید:

$$(2a-b)^3 + (2b-c)^3 + (2c-a)^3 = 3(2a-b)(2b-c)(2c-a)$$

۱۳. اگر $4x^3 = 3(2x-3)$ ، حاصل $4x^6 - 3^6$ چقدر است؟

۱۴. اگر $a^2 = b^2 + c^2$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

۱۵. مجموع مکعبات سه عدد متوالی ۲۱۶ می باشد. آن سه عدد کدامند؟

۱۶. معادلات زیر را حل کنید:

$$\text{الف) } 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0 \quad \text{ب) } x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{ج) } (5-2x)(2x+7) = 4x^2 - 25 \quad \text{د) } 4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0$$

$$\text{هـ) } (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$$

۱۷. ثابت کنید: $a^4 - 2a^2(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 - b^4 = 0$

۱۸. اگر $a+b+c=2p$ ، ثابت کنید:

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

۱۹. معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف)} \quad (3x^2 - 9)^3 - (x^2 - 1)^3 = (2x^2 - 8)^3$$

$$\text{ب)} \quad (x - 2)^3 + (x - 6)^3 - (2x - 8)^3 = 0$$

۲۰. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

۲۱. اگر $x = 3a + b - 4$ و $y = 2a + \frac{2}{3}b - 3$ ، حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

۲۲. نشان دهید عبارت زیر بر $x - 2$ بخش پذیر است. سپس آن را تجزیه کنید.

$$6x^3 - 5x^2 - 17x + 6$$

۲۳. ثابت کنید $x^3 + y^9$ بر $x + y$ بخش پذیر است.

۲۴. ثابت کنید $17^{19} - 37^{19}$ بر ۵ بخش پذیر است.

۲۵. ثابت کنید $7^{723} + 8^{241}$ بر ۹ بخش پذیر است.

۲۶. نشان دهید عدد $17^{20} - 47^{20}$ بر اعداد ۳۰ و ۶۴ قابل قسمت است.

۲۷. ثابت کنید اگر a عددی صحیح باشد، عدد $1 - (2a + 1)^2$ بر ۸ قابل قسمت است.

۲۸. ثابت کنید تفاضل مربع‌های دو عدد فرد متوالی بر ۸ قابل قسمت است.

۲۹. ثابت کنید $2^9 - 1$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

۳۰. ثابت کنید $5^6 - 10^4$ بر ۹ بخش پذیر است.

۳۱. ثابت کنید $19^3 + 41^3$ بر ۲۰ بخش پذیر است.

۳۲. ثابت کنید $13^{2n} - 1$ و $13^{2n} - 1$ بر ۱۶۸ بخش پذیرند.

۳۳. ثابت کنید $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ بر $(x - y)(y - z)(x - y)$ بخش پذیر است.

۳۴. اگر $\frac{x^2 - xy - 2y^2}{x^2 - 2xy} = 6$ و $x + y = 42$ باشد، حاصل $x - y$ چقدر است؟

۳۵. اگر $x^2 + y^2 = 4(x - y - 2)$ باشد، حاصل $x + y$ چیست؟

۳۶. اگر A و B به صورت زیر باشند، حاصل $(A^4 + B^5)^{2000}$ را حساب کنید:

$$A = (1 + x + x^2 + \dots + x^{50})(1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-50})^{-1}$$

$$B = (x^{70} - x^{20} + 1)(x^{70} + x^{20} + 1) - (x^{70} + 1)^2$$

۳۷. اگر $3a^3 - 17a^2 + 2a = 3$ و $5a^3 + 5a^2 + 4a = 8$ باشد، حاصل عبارت $(2a - 1)^6$ را حساب کنید.

۳۸. اعداد مخالف صفر x و y و z در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)$$

ثابت کنید: $x = y = z$.

۳۹. اگر:

$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2$$

$$= (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2$$

باشد، ثابت کنید $x = y = z$.

۴۰. بزرگ‌ترین توان ۲ که عدد $1 - 3^{128} = A$ بر آن بخش‌پذیر است، چیست؟

👉 فصل هفتم

عبارات گویا

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها

برای تعیین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک جمله‌های جبری ابتدا هر کدام از آن‌ها را تجزیه می‌کنیم، سپس از میان عامل‌های مشترک آن توانی را انتخاب می‌کنیم که نمایش کوچک‌تر است و این عامل‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی کوچک‌ترین مضرب مشترک جمله‌های جبری، پس از تجزیه‌ی هر کدام از جمله‌ها، عامل‌های مشترک را با توان بزرگ‌تر و عامل‌های غیرمشترک را انتخاب کرده در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۱: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک جمله‌های زیر را تعیین کنید.

$$۳۶a^۲b^۲c^۲ \text{ و } ۲۴ab^۴c^۳ \text{ و } ۱۶a^۲b^۳cd$$

📎 حل:

$$۳۶a^۲b^۲c^۲ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times a^۲b^۲c^۲$$

$$۲۴ab^۴c^۴ = ۲^۳ \times ۳ \times ab^۴c^۴$$

$$۱۶a^۳b^۳cd = ۲^۴ \times a^۳b^۳cd$$

$$\text{م. م. ب.} = ۲^۲ \times a \times b^۲ \times c = ۴ab^۲c$$

$$\text{م. م. ک.} = ۲^۴ \times ۳^۲ \times a^۳ \times b^۴ \times c^۴ \times d = ۱۴۴a^۳b^۴c^۴d$$

مثال ۲: عبارات جبری A ، B ، C و D به صورت زیر تجزیه شده‌اند. ب. م. و ک. م. م. این عبارات را به دست آورید.

$$A = 2^3 \times 3 \times 5 \times (x-1)^2 (x+1) \quad B = 2^2 \times 3^2 \times (x-1)(x+2)^2$$

$$C = 2^4 \times 5^2 \times (x-1)^3 \quad D = 2 \times 3^2 \times (x-1)^4 (x+1)^2$$

حل: 

$$\text{ب. م.} = 2(x-1)$$

$$\text{م. م.} = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times (x-1)^4 (x+1)^2 (x+2)^2 = 3600(x-1)^4 (x+1)^2 (x+2)^2$$

مثال ۳: ب. م. م. و ک. م. عبارات زیر را به دست آورید:

$$A = x^3 - 8 \quad B = (x^2 - 4)^3 \quad C = (x^4 - 3x^2 - 4)^2$$

حل: 

$$A = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$B = (x^2 - 4)^3 = (x-2)^3 (x+2)^3$$

$$C = (x^4 - 3x^2 - 4)^2 = [(x^2 - 4)(x^2 + 1)]^2 = (x-2)^2 (x+2)^2 (x^2 + 1)^2$$

$$\text{ب. م.} = x - 2$$

$$\text{م. م.} = (x-2)^3 (x+2)^3 (x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 4)$$

☆ عبارات گویا

عبارت جبری به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای و $Q(x)$ مخالف

صفر باشد یک عبارت گویا نامیده می‌شود. به عنوان مثال عبارت $\frac{x-2}{x^2+5x-1}$ یک عبارت

گویا می‌باشد. اما عبارت $\frac{\sqrt{x}+5}{x-3}$ گویا نیست.

☆ ساده کردن عبارات گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم. سپس عامل‌های مشترک را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

مثال ۴ :

$$\text{الف)} \quad \frac{4ax + 8ay}{2bx + 6by} = \frac{4a(x + 2y)}{2b(x + 2y)} = \frac{4a}{2b}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad \frac{ax - bx - ay + by}{(b^2 - a^2)(x - y)} &= \frac{x(a - b) - y(a - b)}{(b - a)(b + a)(x - y)} \\ &= \frac{(a - b)(x - y)}{-(a - b)(a + b)(x - y)} = \frac{-1}{a + b} \end{aligned}$$

☆ ضرب و تقسیم عبارات گویا

برای به دست آوردن حاصل ضرب چند کسر ابتدا کسرهای را ساده می کنیم. سپس صورتها را در هم و مخارجها را نیز در هم ضرب می کنیم. برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم کسرهای، ابتدا کسر دوم را به ضرب تبدیل کرده، سپس ساده می کنیم و به مانند ضرب کسرهای عمل می نماییم.

مثال ۵ :

$$\text{الف)} \quad \frac{6a^3b^2c}{7x^2y} \times \frac{14x^4y}{12a^2b^4} = \frac{a^2x^2c}{b^2}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{2b - 2a}{4a + 2b} \times \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{-2(a - b)}{2(a + b)} \times \frac{(a + b)^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{-2}{2} = -\frac{1}{1}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad \frac{6x^2 + x - 1}{9x^2 + 9x - 4} \times \frac{9x^2 - 16}{4x^2 + 4x + 1} &= \frac{(3x - 1)(2x + 1)}{(3x - 1)(3x + 4)} \times \frac{(3x - 4)(3x + 4)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{3x - 4}{2x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د)} \quad \frac{4x^2 - 9a^2}{ab - a^2} \div \frac{2x - 3a}{a^2b - a^4} &= \frac{4x^2 - 9a^2}{ab - a^2} \times \frac{a^2b - a^4}{2x - 3a} \\ &= \frac{(2x - 3a)(2x + 3a)}{a(b - a)} \times \frac{a^2(b - a)}{2x - 3a} = a^2(2x + 3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{هـ)} \quad \frac{a^3 - 8}{a^2 - a - 2} \div \frac{2a^2 + 4a + 8}{2a + 2} &= \frac{a^3 - 8}{a^2 - a - 2} \times \frac{2a + 2}{2a^2 + 4a + 8} \\ &= \frac{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{(a - 2)(a + 1)} \times \frac{2(a + 1)}{2(a^2 + 2a + 4)} = 1 \end{aligned}$$

☆ تعیین مخرج مشترک بین چند عبارت گویا

برای تعیین مخرج مشترک بین چند کسر هریک از مخرج‌ها را تجزیه کرده و کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها را پیدا کرده به عنوان مخرج مشترک انتخاب می‌کنیم.

مثال ۶: کسرهای $A = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ و $B = \frac{3x + 3}{x^3 + 2x^2 + x}$ و $C = \frac{2x}{x^3}$ را هم‌مخرج

کنید.

✎ حل:

ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{x}{x + 1} \quad B = \frac{3}{x(x + 1)} \quad C = \frac{2}{x^2}$$

اکنون مخرج مشترک می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$A = \frac{x^3}{x^2(x + 1)} \quad B = \frac{3x}{x^2(x + 1)} \quad C = \frac{2(x + 1)}{x^2(x + 1)}$$

☆ جمع و تفریق عبارات گویا

برای به‌دست آوردن حاصل جمع یا تفاضل کسرهای ابتدا هر کسر را در صورت امکان ساده می‌کنیم. سپس کسرهای هم‌مخرج کرده و یکی از مخرج‌ها را نوشته و مجموع جبری صورت‌ها را در صورت قرار می‌دهیم.

مثال ۷:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{1}{x} + \frac{3x}{x + 1} - \frac{1}{x(x + 1)} &= \frac{x + 1}{x(x + 1)} + \frac{3x^2}{x(x + 1)} - \frac{1}{x(x + 1)} \\ &= \frac{x + 1 + 3x^2 - 1}{x(x + 1)} = \frac{3x^2 + x}{x(x + 1)} = \frac{3x + 1}{x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب)} \quad & \frac{x^2 - x^2}{x^4 + x^2} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} + \frac{x - 1}{x^2 - 1} \\
 &= \frac{x^2(x-1)}{x^2(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{x^2-1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} \\
 &= \frac{2x-1-(x^2-1)+x}{x(x+1)} = \frac{2x-x^2}{x(x+1)} = \frac{x(2-x)}{x(x+1)} = \frac{2-x}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{ج)} \quad 1+x+x^2 + \frac{x^3}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)+x^3}{1-x} = \frac{1-x^3+x^3}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{د)} \quad & \frac{3a}{9a^2-1} + \frac{4}{2a-1} - \frac{5}{2a+1} = \frac{3a}{9a^2-1} + \frac{4(2a+1)}{9a^2-1} - \frac{5(2a-1)}{9a^2-1} \\
 &= \frac{3a+12a+4-10a+5}{9a^2-1} = \frac{27a+9}{9a^2-1} = \frac{9(2a+1)}{(2a-1)(2a+1)} = \frac{9}{2a-1}
 \end{aligned}$$

مثال ۸: ثابت کنید:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

حل: 

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{-(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0
 \end{aligned}$$

مثال ۹: ثابت کنید:

$$\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right) = \frac{a-b}{a+b}$$

حل 

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right) &= \frac{(a+b) - (a-b)}{a+b} \div \frac{(a+b) - (a-b)}{a-b} \\ &= \frac{a+b - a + b}{a+b} \div \frac{a+b - a + b}{a-b} = \frac{2b}{a+b} \div \frac{2b}{a-b} = \frac{2b}{a+b} \times \frac{a-b}{2b} = \frac{a-b}{a+b} \end{aligned}$$

مثال ۱۰: ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) + \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) \\ = 2(a+b+c) \end{aligned}$$

حل 

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)(b^2+c^2-a^2) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)(c^2+a^2-b^2) \\ &+ \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)(a^2+b^2-c^2) = \frac{b^2}{c} + c - \frac{a^2}{c} + b + \frac{c^2}{b} - \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a} + a - \frac{b^2}{a} + c + \frac{a^2}{c} \\ &- \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{b} + b - \frac{c^2}{b} + a + \frac{b^2}{a} - \frac{c^2}{a} = 2a + 2b + 2c = 2(a+b+c) \end{aligned}$$

☆ تجزیه‌ی یک کسر به مجموع کسرهای ساده

تبدیل یک کسر به مجموع چند کسر ساده‌تر را تجزیه‌ی کسر می‌نامند. برای تجزیه‌ی کسر ابتدا آن را ساده می‌کنیم و فرض می‌کنیم کسری باشد که درجه‌ی صورت آن از درجه‌ی مخرجش کوچک‌تر است. (اگر چنین نبود می‌توانیم صورت را بر مخرج تقسیم کنیم و آن را به صورت مجموع یک چندجمله‌ای و یک کسر که درجه‌ی صورتش کم‌تر از درجه‌ی مخرج باشد تبدیل کنیم.)

برای تجزیه‌ی چنین کسری مخرج آن را به ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. برحسب آن که همه‌ی عامل‌ها از درجه‌ی اول یا بعضی از درجه‌ی دوم باشند و برحسب این که این عامل‌ها دارای توان یک یا دارای توانی بزرگ‌تر از یک باشند، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: همه‌ی عامل‌های مخرج از درجه‌ی اول و با توان یک باشند.

در این حالت نظیر هر عامل یک کسر در نظر می‌گیریم که آن عامل مخرج کسر و عدد ثابتی مانند A و B و C و ... صورت آن باشد. مجموع این کسرها را متحد با کسر مفروض قرار می‌دهیم و پس از هم‌مخرج کردن طرفین تساوی صورت‌های دو کسر را متحد قرار می‌دهیم و از این طریق مقادیر ثابت A و B و C و ... را پیدا می‌کنیم.

مثال ۱۱: کسر $\frac{1-x}{x^2+4x+3}$ را تجزیه کنید.

حل: 

$$\frac{1-x}{x^2+4x+3} = \frac{1-x}{(x+1)(x+3)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+3)} = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+3)} \Rightarrow -x+1 = (A+B)x+2A+B$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=1 \text{ و } B=-2$$

بنابراین:

$$\frac{1-x}{x^2+4x+3} = \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{x+3}$$

مثال ۱۲: کسر زیر را به صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

$$\frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}$$

حل: 

$$\frac{9x^2-16x+4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{9x^2-16x+4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$9x^2-16x+4 \equiv Ax^2-2Ax+2A+Bx^2-2Bx+Cx^2-Cx$$

$$9x^2-16x+4 \equiv (A+B+C)x^2-(2A+2B+C)x+2A$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ 2A+2B+C=16 \\ 2A=4 \rightarrow A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+B+C=9 \\ 2+2B+C=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=7 \\ 2B+C=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3 \\ C=4 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2}$$

نکته: برای محاسبه‌ی A ، B و C می‌توان به این ترتیب عمل کرد که دو مقدار دلخواه به جای x قرار داده و دستگاه حاصل را حل کرد. اگر مخرج‌ها درجه‌ی اول باشند، می‌توان از ریشه‌های آن‌ها نیز استفاده کرد. به عنوان مثال در عبارت فوق اگر به جای x عدد یک را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$9 \times 1 - 16 \times 1 + 4 = A \times 0 + B \times 1 \times (1-2) + C \times 0$$

$$-3 = -B \rightarrow B = 3$$

به همین ترتیب اگر جای x صفر قرار دهیم A و اگر به جای x عدد دو را قرار دهیم C به دست می‌آید.

حالت دوم: همه‌ی عامل‌های مخرج درجه‌ی اول، اما بعضی یا همه‌ی آن‌ها به توان بزرگ‌تر از یک می‌باشند.

در این حالت نظیر هر عامل مانند $(ax+b)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

سپس مانند حالت اول عمل می‌کنیم.

مثال ۱۳: کسر $\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2) \\ &= (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2) \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$3x^2 + 3x + 2 \equiv Ax^2 + Ax - 2A + Bx + 2B + Cx^2 - 2Cx + C$$

$$3x^2 + 3x + 2 \equiv (A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + C$$

$$\begin{cases} A+C=3 \\ A+B-2C=3 \\ -2A+2B+C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+3-2C=3 \\ -2A+6+C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-2C=0 \\ -2A+C=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ C=1 \end{cases}$$

$$3B=9 \rightarrow B=3$$

بنابراین:

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - 3x + 2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$$

حالت سوم: بعضی از عامل‌های مخرج از درجه‌ی دو باشند و در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تجزیه‌ناپذیر.

در این حالت نیز مانند حالت‌های اول و دوم عمل می‌کنیم. با این تفاوت که صورت هر کسر که مخرج آن عامل درجه‌ی دوم، یا توانی از این عامل باشد را دو جمله‌ای درجه‌ی اول درنظر می‌گیریم که ضریب‌های آن باید از متحد قرار دادن دو طرف معین شوند.

مثال ۱۴: کسر زیر را به صورت مجموع چند کسر ساده تبدیل کنید.

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 3}{x^4 - 1}$$

حل: 

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$x^3 - x^2 - x - 3 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 + Bx - Bx^2 - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D$$

$$x^3 - x^2 - x - 3 = (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + A - B - D$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ A - B + D = -1 \\ A + B - C = -1 \\ A - B - D = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2C = 2 \rightarrow C = 1 \\ 2D = 2 \rightarrow D = 1 \end{cases}$$

معادله‌ی اول را منهای معادله‌ی سوم می‌کنیم.

معادله‌ی دوم را منهای معادله‌ی چهارم می‌کنیم.

$$\begin{cases} A + B + 1 = 1 \\ A - B + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = -2 \end{cases} \Rightarrow A = -1 \text{ و } B = 1$$

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 3}{x^4 - 1} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

بنابراین:

مثال ۱۵: کسر $\frac{2x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + x - 2}$ را تجزیه کنید.

حل:

با توجه به این که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بزرگ‌تر است صورت را بر مخرج تقسیم کرده و به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$2x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x^2 + x - 2$$

$$2x^3 + 2x^2 - 4x \quad 2x + 1$$

$$x^2 + 4x - 2$$

$$x^2 + x - 2$$

$$3x$$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + x - 2} = 2x + 1 + \frac{3x}{x^2 + x - 2}$$

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}$$

$$3x \equiv (A+B)x + 2A - B$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=1 \text{ و } B=2$$

بنابراین:

$$\frac{3x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + x - 2} = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$

☆ تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای

برای تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌توانیم هریک از جمله‌های چندجمله‌ای را بر یک جمله‌ای تقسیم کنیم.

مثال ۱۶: تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف)} \frac{3a^4b^4 - 4a^5b^3 + 2a^2b^4}{2a^2b^3} \quad \text{ب)} \frac{6x^4 - 3x^2 - 9x}{3x^2}$$

 حل:

$$\text{الف)} \frac{3a^4b^4 - 4a^5b^3 + 2a^2b^4}{2a^2b^3} = \frac{3a^4b^4}{2a^2b^3} - \frac{4a^5b^3}{2a^2b^3} + \frac{2a^2b^4}{2a^2b^3} = \frac{3}{2}a^2b - 2a^3 + b$$

$$\text{ب)} \frac{6x^4 - 3x^2 - 9x}{3x^2} = \frac{6x^4}{3x^2} - \frac{3x^2}{3x^2} - \frac{9x}{3x^2} = 2x^2 - 1 - \frac{3}{x}$$

نکته: چندجمله‌ای A بر یک جمله‌ای B بخش‌پذیر است، در صورتی که هریک از جمله‌های چندجمله‌ای A بر یک جمله‌ای B بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر حاصل تقسیم خود یک چندجمله‌ای باشد.

در مثال (۱۶) قسمت «الف» چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای بخش‌پذیر است ولی در قسمت «ب» چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای بخش‌پذیر نیست.

☆ تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x) \neq 0$ را در نظر بگیرید. در صورتی که درجه‌ی $f(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه‌ی $g(x)$ باشد دو چندجمله‌ای $q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند، به طوری که:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + R(x)$$

که در آن $q(x)$ خارج قسمت و $R(x)$ باقی‌مانده می‌باشد.

درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر است. اگر $R(x) = 0$ باشد، آن‌گاه گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.

برای تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ ابتدا هر دو چندجمله‌ای را بر حسب قوای نزولی x مرتب می‌کنیم، سپس اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم کرده و خارج قسمت را مشخص می‌کنیم. آن‌گاه خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و از مقسوم کم می‌کنیم. این باقی‌مانده را بر مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم. بدین ترتیب که اولین جمله‌ی باقی‌مانده (مقسوم جدید) را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و در خارج قسمت می‌نویسیم. سپس آن‌را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و حاصل ضرب را از مقسوم کم می‌کنیم و اعمال فوق را آنقدر ادامه می‌دهیم تا درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

مثال ۱۷: چندجمله‌ای $6x^3 - 17x^2 + 14x - 3$ را بر دو جمله‌ای $2x - 3$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 17x^2 + 14x - 3 \quad | \quad 2x - 3 \\
 \underline{-6x^3 + 9x^2} \quad 3x^2 - 4x + 1 \\
 -8x^2 + 14x - 3 \\
 \underline{-8x^2 + 12x} \\
 2x - 3 \\
 \underline{-2x + 3} \\
 0
 \end{array}$$

ملاحظه می‌شود باقی‌مانده صفر است. لذا چندجمله‌ای $6x^3 - 17x^2 + 14x - 3$ بر $2x - 3$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱۸: چند جمله‌ای $۶x^۴ + ۱۰x - ۷x^۳ - ۲۳$ را بر $۳x^۲ + ۵ - ۲x$ تقسیم کنید.

حل: 

مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم.

$$\begin{array}{r}
 ۶x^۴ - ۷x^۳ + ۰x^۲ + ۱۰x - ۲۳ \quad | \quad ۳x^۲ - ۲x + ۵ \\
 \underline{-۶x^۴ \mp ۴x^۳ \pm ۱۰x^۲} \quad ۲x^۲ - x - ۴ \\
 -۳x^۳ - ۱۰x^۲ + ۱۰x - ۲۳ \\
 \underline{\mp ۳x^۳ \pm ۲x^۲ \mp ۵x} \\
 -۱۲x^۲ + ۱۵x - ۲۳ \\
 \underline{\mp ۱۲x^۲ \pm ۸x \mp ۲۰} \\
 ۷x - ۳
 \end{array}$$

$$۶x^۴ - ۷x^۳ + ۱۰x - ۲۳ = (۳x^۲ - ۲x + ۵)(۲x^۲ - x - ۴) + (۷x - ۳)$$

مثال ۱۹: عبارت $۵ + x^۶$ را بر $x^۲ - ۱$ تقسیم کنید.

حل: 

$$\begin{array}{r}
 x^۶ + ۵ \quad | \quad x^۲ - ۱ \\
 \underline{-x^۶ \mp x^۴} \quad x^۴ + x^۲ + ۱ \\
 x^۴ + ۵ \\
 \underline{-x^۴ \mp x^۲} \\
 x^۲ + ۵ \\
 \underline{-x^۲ \mp ۱} \\
 ۶
 \end{array}$$

مثال ۲۰: تقسیم زیر را انجام دهید:

$$(x^۵ + ۵x^۴y + ۱۰x^۳y^۲ + ۱۰x^۲y^۳ + ۵xy^۴ + y^۵) \div (x^۲ + ۲xy + y^۲)$$


حل: 

اگر مقسوم و مقسوم‌علیه از چند متغیر تشکیل شده باشند، آن‌ها را برحسب توان‌های نزولی

یکی از متغیرها مرتب کرده، سپس تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \quad | \quad x^3 + 2xy + y^3 \\
 -x^5 \pm 2x^4y \pm x^3y^2 \\
 \hline
 3x^4y + 9x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\
 -3x^4y \pm 6x^3y^2 \pm 3x^2y^3 \\
 \hline
 3x^3y^2 + 7x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\
 -3x^3y^2 \pm 6x^2y^3 \pm 3xy^4 \\
 \hline
 x^2y^3 + 2xy^4 + y^5 \\
 -x^2y^3 \pm 2xy^4 \pm y^5 \\
 \hline
 \end{array}$$

مثال ۲۱: نشان دهید عبارت $x^4 - y^4$ بر $x + y$ بخش پذیر است.

حل: 

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - y^4 \quad | \quad x + y \\
 -x^4 \pm x^3y \\
 \hline
 -x^3y + 0x^2 + 0x - y^4 \\
 \mp x^3y \mp x^2y^2 \\
 \hline
 x^2y^2 + 0x - y^4 \\
 -x^2y^2 \pm xy^3 \\
 \hline
 -xy^3 - y^4 \\
 \mp xy^3 \mp y^4 \\
 \hline
 \end{array}$$

ملاحظه می‌شود $x^4 - y^4$ بر $x + y$ بخش پذیر است. به همین ترتیب با تقسیم می‌توان نتیجه گرفت $x^4 - y^4$ بر $x - y$ نیز بخش پذیر است.

مثال ۲۲: مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که عبارت $x^4 + mx + n$ بر

عبارت $x^2 - 2x - 3$ بخش پذیر باشد.

حل: 

یک روش برای حل این مسئله آن است که چندجمله‌ای $x^2 + mx + n$ را بر $x^2 - 2x - 3$ تقسیم کرده و باقی‌مانده را متحد با صفر قرار دهیم. روش‌های دیگر متعاقباً بیان می‌شوند.

$$x^2 + 0x^1 + 0x^0 + mx + n \quad \Bigg| \quad x^2 - 2x - 3$$

$$\underline{-x^2 \mp 2x^1 \mp 3x^0} \qquad x^2 + 2x + 7$$

$$2x^1 + 3x^0 + mx + n$$

$$\underline{-2x^1 \mp 4x^0 \mp 6x}$$

$$7x^0 + (m+6)x + n$$

$$\underline{-7x^0 \mp 14x \mp 21}$$

$$(m+20)x + n + 21$$

$$(m+20)x + n + 21 \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} m+20=0 \rightarrow m=-20 \\ n+21=0 \rightarrow n=-21 \end{cases}$$

مثال ۲۳: چندجمله‌ای $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ را بر $a+b+c$ تقسیم کنید.

حل: 

$$a^3 + 0a^2 + 0bca + b^3 + c^3 \quad \Bigg| \quad a+b+c$$

$$\underline{-a^3 \pm a^2(b+c)} \qquad a^3 - a(b+c) + b^3 + c^3 - bca$$

$$-a^2(b+c) - 3bca + b^3 + c^3$$

$$\underline{\mp a^2(b+c) \mp a(b+c)^2}$$

$$a(b^2 + c^2 - bc) + b^3 + c^3$$

$$\underline{-a(b^2 + c^2 - bc) \pm b^3 \pm c^3}$$

°

خارج قسمت برابر $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ و باقی‌مانده صفر شد. لذا:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

☆ طریقه‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک دوجمله‌ای

درجه‌ی اول

چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ را بر $x - 2$ تقسیم کرده و باقی‌مانده را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 3x - 5 \\
 \underline{-3x + 6} \\
 1
 \end{array}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 2$ برابر ۱ شد. حال مقدار عددی چندجمله‌ای $p(x)$ را به ازای $x = 2$ (ریشه‌ی دوجمله‌ای $x - 2$) به دست آورید. این مقدار چه ارتباطی با باقی‌مانده‌ی تقسیم فوق دارد؟

$$p(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2 - 5 = 8 - 8 + 6 - 5 = 1$$

حدسی که زده‌اید درست است. یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 2$ برابر با مقدار عددی $p(x)$ به ازای $x = 2$ است.

قضیه: چندجمله‌ای $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و دوجمله‌ای $x - a$ را در نظر گرفته و خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $x - a$ را $Q(x)$ و باقی‌مانده‌ی این تقسیم را R می‌نامیم. بنابر تعریف تقسیم همواره داریم:

$$p(x) \equiv (x - a)Q(x) + R$$

این تساوی به ازای همه‌ی مقادیر x از جمله به ازای $x = a$ برقرار است. بنابراین:

$$p(a) = (a - a)Q(a) + R \Rightarrow p(a) = R$$

بنابراین: باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ برابر $p(a)$ است.

نکته: برای تعیین باقی‌مانده‌ی چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax + b$ کافی است مقدار

عددی $p(x)$ را به ازای $x = \frac{-b}{a}$ (ریشه‌ی دوجمله‌ای $ax + b$) به دست آوریم.

مثال ۲۴: باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ی $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ بر $x + 2$

چیست؟

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

حل: 

$$p(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1 = -8 + 12 + 4 + 1 = 9$$

مثال ۲۵: باقی مانده‌ی تقسیم $p(x) = 5x^3 + 3x^2 - x - 7$ بر $x - 1$ چیست؟

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

حل: 

$$p(1) = 5 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 1 - 7 = 5 + 3 - 1 - 7 = 0$$

می‌توان گفت $p(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر است.

مثال ۲۶: باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 4x^2 - 2x + 7$ بر $2x + 3$ چیست؟

حل: 

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 7 = 9 + 3 + 7 = 19$$

مثال ۲۷: باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $7 + 5x - (m+2)x^2 - (m-1)x^3$ بر

عبارت $x - 2$ برابر ۵ است. مقدار m چقدر است؟

حل: 


$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$(m-1) \times 2^3 - (m+2) \times 2^2 - 5 \times 2 + 7 = 5$$

$$8m - 8 - 4m - 8 - 10 + 7 = 5$$

$$4m - 19 = 5 \rightarrow 4m = 24 \rightarrow m = 6$$


مثال ۲۸ : در عبارت $p(x) = 2x^4 + mx^2 + n$ مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که باقی مانده‌ی تقسیم این عبارت بر $x + 1$ برابر -3 و بر $x - 2$ برابر 3 باشد.

 **حل:**

باید داشته باشیم $p(-1) = -3$ و $p(2) = 3$.

$$\begin{cases} P(-1) = 2 + m + n = -3 \\ P(2) = 32 + 4m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = -5 \\ 4m + n = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = 3 \end{cases}$$

مثال ۲۹ : باقی مانده‌ی تقسیم $p(x) = x^n - a^n$ را بر $x - a$ و $x + a$ به دست آورید.


 **حل:**

$$x - a = 0 \rightarrow x = a \Rightarrow p(a) = a^n - a^n = 0.$$

$$x + a = 0 \rightarrow x = -a \Rightarrow p(-a) = (-a)^n - a^n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ -2a^n & \text{فرد } n \end{cases}$$

ملاحظه می شود چند جمله‌ای $x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش پذیر است. هم چنین اگر n عددی زوج باشد، $x^n - a^n$ بر $x + a$ نیز بخش پذیر است.

مثال ۳۰ : باقی مانده‌ی تقسیم $p(x) = x^n + a^n$ را به دست آورید.

 **حل:**

$$x + a = 0 \rightarrow x = -a$$

$$p(-a) = (-a)^n + a^n = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ 2a^n & \text{زوج } n \end{cases}$$

ملاحظه می شود $a^n + b^n$ در صورتی بر $x + a$ بخش پذیر است که n عددی فرد باشد.

مثال ۳۱ : عدد $7^{10} - 2^{10} = 14$ و $21 - 7 = 28$ و $21 + 7 = 28$ بخش پذیر است.

مثال ۳۲ : عدد $7^{19} + 13^{19}$ بر $20 = 7 + 13$ بخش پذیر است.

مثال ۳۳ : نشان دهید عبارت $A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ بر $x + y$ بخش پذیر است.

✎ حل:

کافی است نشان دهیم مقدار عبارت A به ازای $x = -y$ صفر است.

$$\begin{aligned} x = -y \rightarrow A &= (-y + y + z)^3 - (-y)^3 - y^3 - z^3 \\ &= z^3 + y^3 - y^3 - z^3 = 0 \end{aligned}$$

مثال ۳۴ : باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^4 + 1$ بر $p(x) = 3x^2 + 2x^2 - x^2 + 1$ را بر $x^2 + 1$ به دست آورید.

✎ حل:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\rightarrow x^2 = -1 \\ p(x) &= 3(x^2)^2 + 2(x^2)^2 - x^2 + 1 = 3(-1)^2 + 2(-1)^2 - (-1) + 1 \\ &= -3 + 2 + 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

☆ **باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(x - \alpha)(a - \beta)$**

باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(x - \alpha)(x - \beta)$ از درجه‌ی یک یا صفر است و آن را به صورت $ax + b$ نشان می‌دهیم. لذا:

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + ax + b$$

x را یک‌بار برابر α و یک‌بار برابر β قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} p(\alpha) = a\alpha + b \\ p(\beta) = a\beta + b \end{cases}$$

این دستگاه را نسبت به a و b حل می‌کنیم تا a و b در نهایت باقی مانده یعنی $ax + b$ مشخص شود. این روش را می‌توان برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم بر حاصل ضرب سه عامل و بیش‌تر نیز به کار برد.

مثال ۳۵ : باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^4 - 2x^3 + x - 3$ بر $p(x)$ را بر عبارت $(x + 1)(x - 3)$ به دست آورید.

✎ حل:

$$(x + 1)(x - 3) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$$

$$p(-1) = (-1)^4 - 2 \times (-1)^3 + (-1) - 3 = 1 + 2 - 1 - 3 = -1$$

$$p(3) = 3^4 - 2 \times 3^3 + 3 - 3 = 81 - 54 + 3 - 3 = 27$$

با توجه به این که باقی مانده حداکثر از درجه‌ی یک است، آن را $R = ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + x - 3 = (x+1)(x-3)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} p(-1) = a(-1) + b \\ p(3) = a \times 3 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -a + b \\ 27 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow R = 7x + 6$$

مثال ۳۶: a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای:

$$(x-2)(x+1)p(x) = 2ax^4 + (b-2a)x^3 - bx^2 - 2bx - 4$$

بخش پذیر باشد.

 **حل:**

چندجمله‌ای $p(x)$ باید بر $x+1$ و $x-2$ بخش پذیر باشد.

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$\begin{cases} p(-1)=0 \\ p(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \times (-1)^4 + (b-2a)(-1)^3 - b(-1)^2 - 4b(-1) - 4 = 0 \\ 2a \times 2^4 + (b-2a) \times 2^3 - b \times 2^2 - 4b \times 2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - b + 2a - b + 4b - 4 = 0 \\ 32a + 8b - 16a - 4b - 8b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 16a - 4b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow 6a = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \rightarrow b = 4a - 1 = 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

مثال ۳۷: ثابت کنید $17^{2^n} - 1$ بر 29 بخش پذیر است. ($n \in N$ و $n > 1$)

 **حل:**

$$17^{2^n} - 1 = (17^2)^{2^{n-1}} - 1 = 289^{2^{n-1}} - 1^{2^{n-1}}$$

با توجه به این که 2^{n-1} زوج است، عدد فوق بر $290 = 289 - 1$ بخش پذیر است. بنابراین بر 29 نیز بخش پذیر است.

☆ پیدا کردن خارج قسمت یک تقسیم به روش ضریب‌های نامعین

می‌خواهیم خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $3x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ را بر $x + 1$ به دست آوریم. با توجه به این که مقسوم از درجه‌ی ۳ و مقسوم‌علیه از درجه‌ی ۱ می‌باشد می‌توان گفت خارج قسمت چندجمله‌ای از درجه‌ی دوم است که آن را $ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم. با توجه به این که $p(-1) = 0$ است، $p(x)$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. بنابراین:

$$3x^3 + 5x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$3x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$$

$$3x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 5 \\ b + c = 3 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow 3 + b = 5 \rightarrow b = 2$$

$$3x^2 + 2x + 1$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم فوق عبارت است از:

مثال ۳۸: خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 + 22x^2 + 22x + 17$ را بر عبارت $2x + 4$ به دست آورید.

 حل:

$$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$$

$$p(-2) = 8 \times (-8) + 22 \times 4 + 22 \times (-2) + 17$$

$$= -64 + 88 - 44 + 17 = -3 \quad \text{باقی مانده}$$

$$8x^3 + 22x^2 + 22x + 17 = (2x + 4)(ax^2 + bx + c) - 3$$

$$8x^3 + 22x^2 + 22x + 17 = 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 4ax^2 + 4bx + 4c - 3$$

$$8x^3 + 22x^2 + 22x + 17 = 2ax^3 + (2b + 4a)x^2 + (2c + 4b)x + 4c - 3$$

$$\begin{cases} 2a = 8 \rightarrow a = 4 \\ 2b + 4a = 22 \\ 2c + 4b = 22 \\ 4c - 3 = 17 \rightarrow c = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b + 16 = 22 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم عبارتست از: $4x^2 + 3x + 5$

تمرین‌های فصل هفتم

۱. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارات زیر را به دست آورید:

$$A = ۱۲۰(x-۳)^۲(x-۱)^۳$$

$$B = ۱۸۰(x-۳)(x-۱)^۲$$

$$C = ۱۴۴(x-۳)^۳(x+۱)$$

۲. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک هر دسته از عبارات زیر را به دست آورید.

الف $۹x^۲ - ۸۱$ و $x^۲ - ۶x + ۹$ و $۵x^۲ - ۱۵x$

ب $۴a^۲ - ۹$ و $۴a^۲ - ۱۲a + ۹$ و $۱۰a - ۱۵$

ج $a^۴ - ۸۱$ و $a^۴ + ۱۸a^۲ + ۸۱$

د $۴۰y^۳ - ۵$ و $۴y^۲ - ۴y + ۱$ و $۴۰y^۳ - ۶۰y^۲ + ۳۰y - ۵$

هـ $x^۳ + ۸x^۲ + ۱۵x$ و $x^۴ + ۳x^۳ - ۱۰x^۲$

و $x^۲ - ۲xy - ۱۵y^۲$ و $x^۲ + ۷xy + ۱۲y^۲$

ز $(۹a^۲ - ۹b^۲)^۲$ و $(۴a - ۴b)^۳$ و $(۶a - ۶b)^۲$ و $۲۴a - ۲۴b$

ح $a^۳ + ۲۷b^۳$ و $۵a^۲ - ۴۵b^۲$ و $a^۲ + ۵ab + ۶b^۲$

ط $۱۲c^۳ - ۲۳c^۲d - ۲۴cd^۲$ و $۱۵c^۴ - ۳۴c^۳d - ۱۶c^۲d^۲$

۳. کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{۱۴b^۴x \times ۵ay \times ۶a}{۱۵a^۲x \times ۷b^۳y}$$

$$\text{ب)} \frac{۳۴a^۲b^۵c^۵ \times ۶a^۷b^۲d^۳}{ac^۳d^۳ \times ۵۱a^۴b^۲c^۲}$$

$$\text{ج)} \frac{a^۳ + b^۳}{(a-b)^۲ + ab}$$

$$\text{د)} \frac{۴a^۲ + ۱۲a + ۹}{۴a^۲ - ۹}$$

$$\text{هـ)} \frac{۱۲ax^۲ + ۳ax}{۸x^۲ + ۲۲x + ۵}$$

$$\text{و)} \frac{۱۶x^۳ - ۱۲۸}{۸x^۲ - ۲۴x + ۱۶}$$

$$\text{ز)} \frac{a^۶ - b^۶}{(a+b)(a^۳ - b^۳)}$$

$$\text{ح)} \frac{c^۲ - a^۲ - b^۲ - ۲ab}{a+b+c}$$

$$\text{ط)} \frac{x^۴ - ۹x^۲}{x^۴ - x^۳ - ۶x^۲}$$

$$\text{ی)} \frac{xy + ۵x + ۷y + ۳۵}{y + ۵}$$

$$\text{ک)} \frac{a^۳ + b^۳}{(a-b)^۲ + ab}$$

$$\text{ل)} \frac{(a^۲ + b^۲ - c^۲)^۲ - (a^۲ - b^۲ + c^۲)^۲}{۴ab^۲ - ۴abc}$$

$$\text{م)} \frac{(a^۴ + ۲a^۴x^۲ + x^۴)(a^۴ - x^۴)}{(a^۲ + x)(a^۶ - a^۴x + a^۲x^۲ - x^۴)}$$

$$\text{ن)} \frac{(x^۲ - ۱)(y^۲ - ۱)}{(xy + ۱)^۲ - (x + y)^۲}$$

$$\text{س)} \frac{۲x^۲ - ۱۱x + ۵}{۶x^۲ + ۵x - ۴}$$

$$\text{ع)} \frac{۶x^۳ + ۳x^۲ - ۳x}{۲x^۲ + x - ۱}$$

۴. حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف)} \frac{۱}{a^۲bc} + \frac{۱}{ab^۲c} + \frac{۱}{abc^۲}$$

$$\text{ب)} \frac{۳a}{a^۲ - ۱۶} - \frac{۲}{a - ۴}$$

$$\text{ج)} \frac{a}{۳+a} + \frac{a}{۳-a} + \frac{۲a^۲}{۹-a^۲}$$

$$\text{د)} \frac{۳x}{x+۲} + \frac{۱۲x}{x^۲-۴} - \frac{۳x^۲-۱۲}{x^۲-۴}$$

$$\text{هـ)} \frac{a+۵}{a-۱} - \frac{۶}{a^۲+a+۱} - \frac{۶(a^۲+۲)}{a^۳-۱}$$

$$\text{و)} ۱-x+x^۲ - \frac{x^۳}{۱+x}$$

$$\text{ز)} ۱-۲x+x^۲ + \frac{۱-x^۴}{۱+۲x+x^۲}$$

$$\text{ح)} \frac{x-۲y}{xy} + \frac{۳y-a}{ay} - \frac{۳x-۲a}{ax}$$

$$ط) \frac{x}{x^2 + 5x + 6} + \frac{15}{x^2 + 9x + 14} - \frac{12}{x^2 + 10x + 21}$$

$$ی) \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \times \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 2x - 8}$$

$$ک) \frac{a^2 + ac}{a^2c - c^3} - \frac{a^2 - c^2}{a^2c + 2ac^2 + c^3} + \frac{2c}{c^2 - a^2} - \frac{3}{a + c}$$

$$ج) \frac{a^2b^2 + 2ab}{4a^2 - 1} \times \frac{2a + 1}{ab + 2}$$

$$م) \frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2} + \frac{xy}{(x + y)(x^2 + y^2)}$$

$$ن) \frac{4x^2 - 9a^2}{ab - a^2} \div \frac{2x - 3a^2}{a^2b - a^2}$$

$$س) \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \times \frac{x^2y + y^3}{x^2 + x^2y^2 + y^4} \times \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$$

$$ع) \left(a^2 - x + \frac{2x^2}{a^2 + x} \right) (a^2 + x)$$

$$ف) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$ص) \frac{x^2 - x - 2}{a^2 - b^2} \div \frac{x - 2}{a^2 + ab}$$

۵. ثابت کنید:

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$$

۶. ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)} = 0$$

۷. اگر $a + b + c = 0$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) = 9$$

۸. ثابت کنید:

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a-b} + \frac{2b^2 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2} = 1$$

۹. ثابت کنید:

$$\frac{3a - 2b}{a+b} - \frac{5a - 2b}{a-b} - \frac{4a - 5b}{a+b} + \frac{7a - 2b}{a-b} = 1$$

۱۰. نشان دهید:

$$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right) = 3$$

۱۱. نشان دهید:

$$\left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) \times \frac{(a-b)^2}{2b} = a-b$$

۱۲. درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$

ب) $\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4} = \frac{2a}{a-b}$

۱۳. کسر مرکب زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{1+x} \right)}$$

۱۴. ثابت کنید:

$$\frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)} + \frac{(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)} = 1$$

۱۵. ثابت کنید:

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

۱۶. ثابت کنید:

$$\frac{1+a}{(a-b)(a-c)} + \frac{1+b}{(b-c)(b-a)} + \frac{1+c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

۱۷. اگر $xyz = 1$ ، ثابت کنید:

$$\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} = 1$$

۱۸. اگر $x^2 - yz = a$ و $y^2 - zx = b$ و $z^2 - xy = c$ ، ثابت کنید:

$$(a+b+c)(x+y+z) = ax + by + cz$$

۱۹. اگر $x = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}$ و $y = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$ حاصل عبارت $(x+1)(1+y)$ را به دست آورید.

۲۰. ثابت کنید:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$$

۲۱. عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}$$

۲۲. ثابت کنید:

$$\frac{x^4 - (x-1)^4}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^4 - (x-1)^4}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^2 - (x^2+1)^2} = 1$$

۲۳. اگر $b = a - ۱$ و $c = a + ۲$ ، ثابت کنید:

$$\frac{a^2 b^2 c^2 - a^2 b^2 - c^2 + ۱}{a^2 bc - \frac{c}{b} + b \left(a^2 - \frac{۱}{b^2} \right)} + ۱ = a^2$$

۲۴. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\frac{۱}{a(a+۲)} + \frac{۱}{(a+۲)(a+۴)} + \dots + \frac{۱}{(a+۹۸)(a+۱۰۰)}$$

۲۵. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{۲ab}{b^2 - a^2} \right) \frac{a}{a-b} + \left(\frac{b}{b-a} + \frac{۲ab}{a^2 - b^2} \right)$$

۲۶. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\left[\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - ۲ \right)^{-۱} \right] \left[\left(۱ + \frac{y}{x} \right) \left(\frac{x}{x-y} \right) \right]^{-۱}$$

۲۷. مقادیر A و B و C را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\text{الف)} \quad \frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+۱} + \frac{C}{x+۲}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{۱}{(x+۱)^2(x+۲)} = \frac{A}{x+۱} + \frac{B}{(x+۱)^2} + \frac{C}{x+۲}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{۱}{(x^2+۱)(x-۱)} = \frac{Ax+B}{x^2+۱} + \frac{C}{x-۱}$$

۲۸. کسرهایی زیر را به صورت مجموع چند کسر ساده تبدیل کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{۱}{x^2 - x}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{۲x}{(x+۱)^2}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{x^3}{x^4 - ۱}$$

$$\text{د)} \quad \frac{۲x^2 + ۲x + ۱}{x^2(x+۱)}$$

$$\text{هـ)} \frac{7x^2 - 6x + 1}{(x-3)(x^2-3x+2)}$$

$$\text{و)} \frac{x^3 - 7x^2 - 3x - 7}{x^4 - 1}$$

$$\text{ز)} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 19x + 16}{x^2 + x - 6}$$

۲۹. تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف)} (x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 6) \div (x - 2)$$

$$\text{ب)} (6x^4 - 7x^3 + 10x - 23) \div (3x^2 - 2x + 5)$$

$$\text{ج)} (x^5 - x^2 + 2 - x^4 - x^3 - x) \div (x + 1 + x^2)$$

$$\text{د)} (x^5 + x^4 - x^2 + 1) \div (x^2 + x + 2)$$

$$\text{هـ)} (x^{10} + x^5 + 1) \div (x^2 + x + 1)$$

$$\text{و)} (2x^{10} + 7x^8 + x^6 + 2x^4 - 3x^2 - 1) \div (x^4 - 3x^2 - 1)$$

$$\text{ز)} (x^5 + 1) \div (x + 1)$$

$$\text{ح)} (2x^5 - 4x^4 - x^3 - 5x - 2) \div (2x^3 + x + 2)$$

$$\text{ط)} (a^4 - b^4) \div (a - b)$$

۳۰. بدون انجام عمل تقسیم باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $5x^5 - 4x^3 - 3x + 2$ بر $x + 2$ را به دست آورید.

۳۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم زیر را بدون انجام عمل تقسیم به دست آورید.

$$(9x^3 + 12x^2 + 6x - 7) \div (3x + 1)$$

۳۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^6 - 2x^3 + 1$ بر $x^3 + 1$ چیست؟

۳۳. باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $2x^3 + x^2 - 3x + 1$ بر $2x - 1$ را بدون انجام تقسیم به دست آورید.

۳۴. نشان دهید چندجمله‌ای $(y^2 + yz + z^2) - y(x^2 + xz + z^2) - x(x^2 + xz + z^2)$ بر $x - y$ بخش‌پذیر است.

۳۵. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $(m-2)x^3 + (2m-5)x^2 - 3x - m$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد.

۳۶. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای زیر بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.

$$(2m-n)x^3 + (m-3)x^2 - (n-1)x - 10$$

۳۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $2mx^2 + (m-1)x^4 + 1$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد.

۳۸. a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^5 + bx^3 + ax^2 + 3$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+1$ برابر -4 باشد.

۳۹. نشان دهید $x^5 + y^{15}$ بر $x^3 + y^3$ بخش پذیر است.

۴۰. باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^5 - x^{15} + 2x^{30} - 3x^{45} = p(x) + 1$ بر $x^5 + 1$ را حساب کنید.

۴۱. باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^6 - 7x^2 + 5x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 1$ بر $x^2 + 1$ را به دست آورید.

۴۲. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $7m + 3x^3 - x^4$ بر $x+4$ بخش پذیر باشد.

۴۳. ثابت کنید عدد $3^8 - 2^{20}$ بر 23 بخش پذیر است.

۴۴. ثابت کنید عدد $3^{14} + 2^{35}$ بر 41 بخش پذیر است.

۴۵. ثابت کنید عبارت $3^{4x} - 1$ بر 80 بخش پذیر است. ($x \in N$)

۴۶. باقی مانده‌ی تقسیم $2^{39} - 15^{26}$ بر 217 چیست؟

۴۷. اگر باقی مانده‌ی تقسیم دو عبارت $x^3 + 4x - 1$ و $x^3 + mx - 4m$ بر $x+1$ یکی باشند، مقدار m را تعیین کنید.

۴۸. باقی مانده‌ی تقسیم $x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1$ را بر $x^2 - 3x + 2$ تعیین کنید.

۴۹. ضرایب m ، n و p را به طریقی تعیین کنید که عبارت:

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$$

بر $(x-3)(x^2-1)$ بخش پذیر باشد.

۵۰. ضرایب p و q را چنان تعیین کنید که عبارت $x^4 + px^2 + q$ بر $x^2 + 2x + 5$ بخش پذیر باشد.

۵۱. اگر باقی مانده‌ی $p(x)$ بر $x+1$ و $x-1$ به ترتیب ۲ و ۴- باشد، باقی مانده‌ی $p(x)$ را بر x^2-1 تعیین کنید.

۵۲. عبارت درجه‌ی دومی پیدا کنید که بر $x-1$ و $x-3$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی آن بر $x-2$ مساوی ۵ باشد.

۵۳. m و n را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^4 - 3x^2 + mx + n$ بر $x^2 - 2x + 4$ بخش پذیر باشد.

۵۴. اگر در تقسیم $x^6 + ax + b$ بر $(x+3)(x-2)$ باقی مانده برابر $2x+1$ شود، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۵۵. a و b را طوری تعیین کنید که عبارت $2 + 2bx^2 - ax^3 + x^5$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد.

👉 فصل هشتم

رادیکال

ریشه‌ی طبیعی یک عدد

اگر $a \geq 0$ و $n \in N$ آن‌گاه عدد منحصر به فردی مانند $b \geq 0$ وجود دارد که $b^n = a$.
در این صورت مقدار b را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم و آن را ریشه‌ی n ام عدد a می‌نامیم. عدد n که بزرگ‌تر از یک می‌باشد فرجه نامیده می‌شود.

📌 نکته: اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a}$ همواره وجود دارد. ولی اگر n زوج باشد، ریشه‌ی n ام اعداد منفی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف نمی‌شود.

مثال ۱:

الف) $\sqrt{81} = 9$

ب) $\sqrt[3]{125} = 5$

ج) $\sqrt[4]{81} = 3$

د) $\sqrt[5]{32} = 2$

هـ) $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = \frac{-2}{3}$

و) $\sqrt{-16} \notin R$

☆ قدر مطلق

اگر a عددی حقیقی باشد قدر مطلق a که با نماد $|a|$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

مثال ۲ :

الف) $|+7| = 7$

ب) $|-7| = -(-7) = 7$

ج) $|0| = 0$

د) $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

نکته: اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن گاه:

مثال ۳ :

الف) $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

ب) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

ج) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

د) $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

نکته: به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و n عددی زوج باشد:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

و اگر n عدد فرد باشد:

مثال ۴ :

الف) $\sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$

ب) $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

ج) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

د) $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^3} = 2 - \sqrt{5}$

هـ) $\sqrt[6]{(2 - \sqrt{5})^6} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$

و) $\sqrt[4]{(x-1)^4} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$

ز) $\sqrt[5]{(x-1)^5} = x-1$

☆ قواعد محاسبه با رادیکال‌ها

(۱) اگر a و b دو عدد حقیقی و $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند، آن گاه:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\sqrt[n]{a} = x$ و $\sqrt[n]{b} = y$ در این صورت $x^n = a$ و $y^n = b$.

$$x^n y^n = ab \Rightarrow (xy)^n = ab \Rightarrow xy = \sqrt[n]{ab} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

مثال ۵:

الف) $\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

ب) $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-2 \times 4} = \sqrt[3]{-8} = -2$

ج) $\sqrt[4]{3-\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{3+\sqrt{8}} = \sqrt[4]{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})} = \sqrt[4]{9-8} = \sqrt[4]{1} = 1$

د) $\sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$

هـ) $\sqrt[5]{2-\sqrt{5}} \times \sqrt[5]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[5]{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \sqrt[5]{4-5} = \sqrt[5]{-1} = -1$

نکته: اگر n عددی فرد یا a و b نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج و a و b منفی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$$

(۲) اگر $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد، آن‌گاه:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

زیرا:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{m \text{ بار}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \times a \times a \times \dots \times a}}_{m \text{ بار}} = \sqrt[n]{a^m}$$

نتیجه:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

مثال ۶:

الف) $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

ب) $(\sqrt[5]{-5})^5 = \sqrt[5]{(-5)^5} = -5$

(۳) اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند و $b \neq 0$ در این صورت:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

مثال ۷ :

الف) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$

ب) $\sqrt[6]{320} \div \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{64} = 2$

ج) $\sqrt[7]{10^{12}} \div \sqrt[7]{10^5} = \sqrt[7]{10^7} = 10$

د) $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{15}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{20}} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

نکته: اگر n فرد یا $a \geq 0$ و $b > 0$ آن گاه:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$$

و اگر n زوج و a و b منفی باشند:

(۴) اگر n عددی زوج و a و b نامنفی باشند، آن گاه:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

اگر n فرد باشد، رابطه‌ی فوق همواره برقرار است.

اثبات: فرض می‌کنیم $\sqrt[n]{b} = x$ در این صورت $x^n = b$.

$$a^n x^n = a^n b \Rightarrow (ax)^n = a^n b \Rightarrow ax = \sqrt[n]{a^n b} \Rightarrow a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

مثال ۸ :

الف) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$

ب) $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 5} = \sqrt[3]{-40}$

ج) $5\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{5^3 \times (-2)} = \sqrt[3]{-250}$

د) $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \times 7} = -\sqrt{63}$

نکته:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b} & \text{فرد } n \\ |a| \sqrt[n]{b} & \text{زوج } n \end{cases}$$

مثال ۹:

الف) $\sqrt[3]{105} = \sqrt[3]{3^3 \times 5} = 3\sqrt[3]{5}$

ب) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^5 \times 2} = 2\sqrt[5]{2}$

ج) $\sqrt[4]{112} = \sqrt[4]{2^4 \times 7} = 2\sqrt[4]{7}$

د) $\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \times 2} = 7\sqrt{2}$

۵) اگر m و n دو عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد، در این صورت:

$$\sqrt[n]{a} \text{ منفی باشد } m \text{ فرد است.} \quad m\sqrt[n]{a} = m\sqrt[n]{a}$$

مثال ۱۰:

الف) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

ب) $\sqrt[4]{510} = \sqrt[20]{10}$

ج) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-2}} = \sqrt[10]{-2}$

د) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}} = \sqrt[12]{5}$

نکته:

$$\sqrt[3]{-8} \notin R$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{-1}} \notin R$$

۶) اگر $a \geq 0$ باشد، آن گاه به ازای هر عدد طبیعی k :

$$\sqrt[n]{a^m} = k\sqrt[n]{a^{km}}$$

مثال ۱۱:

الف) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$

ب) $\sqrt[5]{10} = \sqrt[10]{100}$

ج) $\sqrt[4]{5^6} = \sqrt{5}$

د) $\sqrt[4]{(-2)^{10}} = \sqrt[5]{2^5}$

نکته: اگر m و n اعداد طبیعی و a عددی حقیقی باشند و $mn\sqrt[n]{a}$ تعریف شده باشد، آن گاه:

$$mn\sqrt[n]{a} = \begin{cases} m\sqrt[n]{a} & n \text{ فرد} \\ m\sqrt[n]{|a|} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال ۱۲:

الف) $\sqrt[6]{(-5)^2} \neq \sqrt[3]{-5}$

ب) $\sqrt[4]{(-2)^4} \neq \sqrt{-2}$

ج) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2} \neq \sqrt{1-\sqrt{2}}$

د) $\sqrt[5]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3} \neq \sqrt[10]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^6}$

مثال ۱۳: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{8}$

ب) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[6]{16}$

ج) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt{125} \times \sqrt[4]{125} \times \sqrt[5]{5}$

د) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \times \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$

هـ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5^{25}}}} \times \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5^{23}}}}$

و) $2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}} \times 2\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^{13}}}$

حل:

الف) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{32}$

ب) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{16^2} \times \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{16^3} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$

ج) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt{125} \times \sqrt[4]{125} \times \sqrt[5]{5} = \sqrt[12]{5^8} \times \sqrt[10]{5^{18}} \times \sqrt[20]{5^9} \times \sqrt[5]{5}$
 $= \sqrt[12]{5^8 \times 5^{18} \times 5^9 \times 5} = \sqrt[12]{5^{36}} = 5^3 = 125$

د) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \times \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})}$
 $= \sqrt[6]{(7-4\sqrt{3})} \times \sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})} = \sqrt[6]{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} = \sqrt[6]{49-48} = 1$

هـ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5^{25}}}} \times \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5^{23}}}} = \sqrt[12]{5^{25}} \times \sqrt[6]{5^{23}} = \sqrt[12]{5^{48}} = 5^4 = 625$

و) $2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}} \times 2\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^{13}}} = \sqrt[12]{2^4 \sqrt[4]{2\sqrt{2}}} \times \sqrt[6]{2^6 \sqrt[4]{2^{13}}} = \sqrt[12]{2^{17} \sqrt{2}} \times \sqrt[6]{2^{17}}$
 $= \sqrt[12]{2^{17} \times 2} \times \sqrt[6]{2^{17}} = \sqrt[12]{2^{18}} \times \sqrt[6]{2^{17}} = \sqrt[12]{2^{36}} = 2^3 = 8$

☆ رادیکال‌های متشابه

دو رادیکال را متشابه گوییم، در صورتی که فرجه‌ها مساوی و عبارات زیر رادیکال یکسان باشند. به عنوان مثال $\sqrt[3]{7}$ و $5\sqrt[3]{7}$ و $3\sqrt[3]{7}$ متشابه‌اند. اما $\sqrt{5}$ و $\sqrt[3]{5}$ متشابه نیستند.

☆ جمع و تفریق رادیکال‌ها

رادیکال‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد که برای این منظور ضرایب رادیکال‌ها را جمع یا تفریق کرده و یکی از رادیکال‌ها را می‌نویسیم.

مثال ۱۴: عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

ب) $2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{12} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{64}$

ج) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{686}$

د) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$

هـ) $(\sqrt{3} - 2)^{18} \times (\sqrt{3} + 2)^{16}$

و) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{192}$

ز) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7(1 - \sqrt{2})}$

ح) $\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})^4} - \sqrt{(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2}$

حل: 

الف) $5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (5 + 4 - 2)\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

ب) $2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{12} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{16 \times 2} + \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{3} - \sqrt{4}$
 $= 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{686} = \sqrt[3]{27 \times 2} - 2\sqrt[3]{8 \times 2} + \sqrt[3]{64 \times 2} - 3\sqrt[3]{343 \times 2}$
 $= 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -18\sqrt[3]{2}$

د) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 5 + 2 + 2\sqrt{10} - (5 + 2 - 2\sqrt{10}) = 4\sqrt{10}$

هـ) $(\sqrt{3} - 2)^{18} \times (\sqrt{3} + 2)^{16} = (\sqrt{3} - 2)^2 \times (\sqrt{3} - 2)^{16} \times (\sqrt{3} + 2)^{16}$
 $= (\sqrt{3} - 2)^2 \times (3 - 4)^{16} = (\sqrt{3} - 2)^2 = 3 + 4 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{و) } 2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{192} &= 2\sqrt[3]{8 \times 2} - 5\sqrt[3]{8 \times 3} + 3\sqrt[3]{125 \times 2} \\ &+ \sqrt[3]{64 \times 3} = 4\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{3} + 15\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3} = 19\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} (1 - \sqrt{2}) &= \sqrt[3]{5(\sqrt{2} + 7)(1 - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)(1 - 2\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2})} \\ &= \sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})} = \sqrt[3]{49 - 50} = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ح) } \sqrt[3]{(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^3} &= |2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}| - |5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}| \\ &= -2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 0 \end{aligned}$$

نکته:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \qquad \sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

مثال ۱۵: اگر $2 < x < 3$ عبارت زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4 - 4x + x^2}$$

حل:

$$2 < x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0, \quad 2 - x < 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4 - 4x + x^2} &= \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2-x)^2} = |x-3| + |2-x| \\ &= -(x-3) - (2-x) = -x + 3 - 2 + x = 1 \end{aligned}$$

مثال ۱۶: ثابت کنید:

$$(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$$

حل:

$$\begin{aligned} (4 + \sqrt{15})\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})^2} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} &= (4 + \sqrt{15})\sqrt{16 - 4\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} \\ &= (4 + \sqrt{15}) \times 2\sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 2(16 - 15) \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

مثال ۱۷: ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{30\sqrt{3} + 37} - \sqrt[3]{30\sqrt{3} - 37} = 2$$

حل: 

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37} &= x \rightarrow (\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37})^3 = x^3 \\
 \Rightarrow 30\sqrt{3}+37-30\sqrt{3}-37-3\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}\times\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37} \\
 (\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37}) &= x^3 \Rightarrow \\
 74-3\times\sqrt[3]{1331}\times x &= x^3 \Rightarrow 74-33x = x^3 \Rightarrow x^3+33x-74=0 \\
 x^3+33x-66-8=0 &\Rightarrow (x^3-8)+(33x-66)=0 \\
 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4)+33(x-2) \\
 (x-2)(x^2+2x+4+33) &= 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+37)=0 \\
 \Rightarrow (x-2)[(x+1)^2+36] &= 0 \rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}
 \end{aligned}$$

مثال ۱۸: ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}}}=5$$

حل: 

فرض کنیم:

$$\sqrt[3]{10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}}}=x$$

در این صورت:

$$\begin{aligned}
 10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}} &= x^3 \Rightarrow 10+3x = x^3 \\
 x^3-3x-10 &= 0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \\
 x-5=0 &\Rightarrow x=5 \quad \text{یا} \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{غیرممکن}
 \end{aligned}$$

☆ توان کسری

اگر a عددی حقیقی و m و n دو عدد طبیعی و $n \geq 2$ باشد، آن گاه:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۹:

$$\frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{36} = 6 \quad (\text{الف})$$

$$\text{ب) } 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

$$\text{ج) } 32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$$

$$\text{د) } 64^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$


مثال ۲۰: عبارات زیر را به صورت یک عدد با توان کسری بنویسید.

$$\text{الف) } \sqrt[3]{5}$$

$$\text{ب) } \sqrt{10}$$

$$\text{ج) } \sqrt[4]{2^3}$$

$$\text{د) } \sqrt[5]{3^{10}}$$

حل: 

$$\text{الف) } \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{ب) } \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ج) } \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{د) } \sqrt[5]{3^{10}} = 3^{\frac{10}{5}} = 3^2$$

مثال ۲۱: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 81^{\frac{5}{4}}$$

$$\text{ب) } (0/25)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{ج) } \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{د) } (0/01)^{-2/5}$$

حل: 

$$\text{الف) } 81^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{81^5} = \sqrt[4]{3^{20}} = 3^{\frac{20}{4}} = 3^5 = 243$$

$$\text{ب) } (0/25)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(0/25)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(0/25)^3}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^6}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

$$c) \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^6}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$c) (0.01)^{-2/5} = 100^{2/5} = 100^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{100^2} = \sqrt[5]{10^4} = 10^{\frac{4}{5}} = 10 \dots$$

مثال ۲۲ : عبارات زیر را به صورت توانی از ۲ بنویسید.

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt{25\sqrt{2}}}$

ب) $\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}$

ج) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2}$

$$c) \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

حل: 

$$\text{الف) } \sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{25}\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3 5^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2 2^{16}}} = \sqrt[3]{5^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{16}{3}}} = 5^{\frac{2}{9}} 2^{\frac{16}{9}} = 2^{\frac{8}{9}}$$

$$c) \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^{-\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{8}}$$

$$ج) \sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt{2^3} \times \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{11}{10}}$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

مثال ۲۳ : عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\sqrt[10]{5^{20} \times 2^{30}}$

ب) $\sqrt[13]{3^{26} \times 2^{39}}$

ج) $\sqrt[5]{2^7 \times 3^6}$

c) $\sqrt[3]{5^4 \times 2^{10}}$

حل: 

$$\text{الف) } \sqrt[3]{5^{20} \times 2^{30}} = \sqrt[3]{5^{20}} \times \sqrt[3]{2^{30}} = 5^{\frac{20}{3}} \times 2^{10} = 5^2 \times 2^3 = 25 \times 8 = 200$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{3^{26} \times 2^{39}} = 3^{13} \times 2^{13} = 3^2 \times 2^3 = 9 \times 8 = 72$$

$$\text{ج) } \sqrt[5]{2^7 \times 3^6} = \sqrt[5]{2^5 \times 2^2 \times 3^5 \times 3} = 2 \times 3 \sqrt[5]{2^2 \times 3} = 6 \sqrt[5]{12}$$

$$\text{د) } \sqrt[3]{5^4 \times 2^{10}} = \sqrt[3]{5^3 \times 5 \times 2^9 \times 2} = 5 \times 2^3 \sqrt[3]{5 \times 2} = 40 \sqrt[3]{10}$$

مثال ۲۴: اگر $x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} = 1$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$A = x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

حل: 

$$A = x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)^3 + 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right) - 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

$$= 1^3 + 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \times 1 - 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 1$$

مثال ۲۵: اگر $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$ ثابت کنید:

$$(a-b)^2 - 4c(a+b) + c^2 = 0$$

حل: 

$$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{c})^2 \Rightarrow a + b + 2\sqrt{ab} = c$$

$$a + b - c = -2\sqrt{ab} \Rightarrow (a + b - c)^2 = 4ab$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 4ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab - 2ac - 2bc + c^2 = 0$$

$$(a-b)^2 - 4c(a+b) + c^2 = 0$$

مثال ۲۶: ثابت کنید: $\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3} > 2$

حل: 

$$\frac{1}{2^0} > 0 \Rightarrow \sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}} > 2^0 = 1$$

$$\frac{1}{3^0} > 0 \Rightarrow \sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}} > 3^0 = 1$$

$$\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3} > 2$$

مثال ۲۷: اگر $x = \sqrt[2]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[2]{1-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^3 - 3x$ چیست؟

حل: 

با توجه به اتحاد $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ خواهیم داشت:

$$x^3 = (\sqrt[2]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[2]{1-\sqrt{2}})^3 = (1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2}) - 3\sqrt[2]{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$x(\sqrt[2]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[2]{1-\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 2\sqrt{2}$$

مثال ۲۸: اگر $x = 1 - \sqrt{2}$ باشد، مقدار عددی عبارت $\frac{1}{2}(x - x^{-1})$ را حساب کنید.

حل: 

$$\frac{1}{2}(x - x^{-1}) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + 2 - 2\sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(1 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات لازم است تا در محاسبات کسری، مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی می‌باشند به گونه‌ای نوشته شوند که مخرج فاقد رادیکال باشد. این کار را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند. برای گویا کردن مخرج کسرها چند روش کلاسیک وجود دارد و در حالت کلی نمی‌توان فرمولی ارائه کرد که مخرج هر کسر با هر رادیکالی را بتواند گویا کند. ولی به هر حال با در پیش گرفتن یک روش منطقی با ترکیبی از روش‌های کلاسیک مخرج کسر را می‌توان گویا کرد.

(۱) گویا کردن مخرج کسرهایی که عبارت مخرج آن‌ها به صورت $(m < n)\sqrt[n]{a^m}$ می‌باشد.

برای گویا کردن مخرج چنین کسرهایی کفایت صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم:

مثال ۲۹: مخرج کسره‌ای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[5]{16}}$

ج) $\frac{3}{\sqrt[9]{128}}$

د) $\frac{5}{\sqrt[7]{9}}$

حل: 

الف) $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[5]{16}} = \frac{2}{\sqrt[5]{2^4}} \times \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{2}}{2} = \sqrt[5]{2}$

ج) $\frac{3}{\sqrt[9]{128}} = \frac{3}{\sqrt[9]{2^7}} \times \frac{\sqrt[9]{2^2}}{\sqrt[9]{2^2}} = \frac{3\sqrt[9]{4}}{2}$

د) $\frac{5}{\sqrt[7]{9}} = \frac{5}{\sqrt[7]{3^2}} \times \frac{\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^5}} = \frac{5\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{5\sqrt[7]{243}}{3}$

(۲) گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج به صورت $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ می‌باشد.
(با فرض $a \neq b$)

در این حالت صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

مثال ۳۰: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

ب) $\frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$

ج) $\frac{5}{2 - \sqrt{3}}$

د) $\frac{7}{3 + \sqrt{5}}$

حل: 

الف) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

ب) $\frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{8(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{(\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})} = \frac{8(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{3 - 7} = -2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

ج) $\frac{5}{2 - \sqrt{3}} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 5(2 + \sqrt{3})$

د) $\frac{7}{3 + \sqrt{5}} = \frac{7(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{7(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{7(3 - \sqrt{5})}{4}$

گاهی اوقات لازم است که صورت و مخرج کسر را بیش از یک بار در مزدوج ضرب کنیم. این حالت معمولاً زمانی اتفاق می‌افتد که فرجه‌ی رادیکال‌های به‌کار رفته در مخرج توانی از ۲ باشند، یا در مخرج بیش از یک رادیکال با فرجه‌ی توانی از ۲ داشته باشیم.

مثال ۳۱: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید:

الف) $\frac{5}{\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}}$

ب) $\frac{3}{2 - \sqrt[4]{2}}$

ج) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

د) $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}$

حل: 

الف) $\frac{5}{\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}} = \frac{5(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})} = \frac{5(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
 $= 5(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

$$\text{ب)} \frac{3}{2-\sqrt[3]{2}} \times \frac{2+\sqrt[3]{2}}{2+\sqrt[3]{2}} = \frac{3(2+\sqrt[3]{2})}{4-\sqrt{2}} \times \frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{3(2+\sqrt[3]{2})(4+\sqrt{2})}{14}$$

$$\text{ج)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12}$$

$$\text{د)} \frac{2}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+1} \times \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-1} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)}{5-2\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{6}} \times \frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{6})}{4-6} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{6})}{2}$$

۲) گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن‌ها به صورت $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ یا $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{ab}$ می‌باشند.

اگر مخرج به صورت $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}$

اگر مخرج به صورت $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}$

اگر مخرج به صورت $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{ab}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$

اگر مخرج به صورت $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{ab}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}$ ضرب می‌کنیم.

مثال ۳۲ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}}$

د) $\frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{20}}$

هـ) $\frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$

و) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$

حل: 

$$\text{الف)} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{25} + \sqrt{4} - \sqrt{10}}{\sqrt{25} + \sqrt{4} - \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{25} + \sqrt{4} - \sqrt{10}}{7}$$

$$\text{ب)} \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{49} + \sqrt{9} + \sqrt{21}}{\sqrt{49} + \sqrt{9} + \sqrt{21}} = \frac{2(\sqrt{49} + \sqrt{9} + \sqrt{21})}{7 - 3} = \frac{\sqrt{49} + \sqrt{9} + \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{ج)} \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$$

$$\text{د)} \frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{16} + \sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{5 - 4} = \sqrt{5} - \sqrt{4}$$

$$\text{هـ)} \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{4 + \sqrt{4} + 2\sqrt{2}}{4 + \sqrt{4} + 2\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{4} + 2\sqrt{2}}{8 - 2} = \frac{4 + \sqrt{4} + 2\sqrt{2}}{6}$$

(و) ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{12}}{\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{12}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{12})}{3 - 4} = -(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{12}) \end{aligned}$$

مثال ۳۳: اگر $x = 3 - \sqrt{2}$ باشد، ثابت کنید $x^2 = \frac{49}{11 + 6\sqrt{2}}$

حل: 

$$x = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{3 + \sqrt{2}} = \frac{7}{3 + \sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{49}{11 + 6\sqrt{2}}$$

مثال ۳۴: اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - 1$$

حل: 

صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرجش ضرب کرده و حاصل‌ها را با هم جمع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \dots \\ & + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3}) \\ & + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1 \end{aligned}$$

مثال ۳۵: حداکثر مقدار $n \in \mathbb{N}$ چقدر باشد تا نامساوی زیر برقرار باشد؟

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > 0.11$$

حل: 

$$\sqrt{n+1} > 0.11 + \sqrt{n} \Rightarrow n+1 > 0.0121 + n + 0.22\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 0.9879 > 0.22\sqrt{n} \Rightarrow \frac{98.79}{22} > \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{98.79}{22}\right)^2 > n \Rightarrow 20.164 > n$$

این نشان می‌دهد که بیش‌ترین مقدار عدد طبیعی n برابر ۲۰ می‌باشد.

☆ رادیکال مرکب

فرض کنیم $A, B > 0$ دو عدد حقیقی باشند. هر عبارت به صورت $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ یا $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ را یک رادیکال مرکب می‌گویند. منظور از ساده کردن یک رادیکال مرکب، نوشتن آن به صورت $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ در حالت اول و یا $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ در حالت دوم می‌باشد.

مثال ۳۶: در رادیکال مرکب $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ با فرض آن که $A^2 - B$ مربع کامل باشد، با در نظر گرفتن $C = \sqrt{A^2 - B}$ ثابت کنید:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

حل: 

فرض کنیم $C = \sqrt{A^2 - B}$ و $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ($x \geq y$). با به توان رساندن طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$A + \sqrt{B} = (x + y) + \sqrt{4xy}$$

با مقایسه‌ی طرفین این تساوی داریم:

$$\begin{cases} x + y = A \\ 4xy = B \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = A^2$$

$$A^2 - B = C^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4xy = C^2 \Rightarrow (x - y)^2 = C^2 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{x \geq y} x - y = C$$

$$\begin{cases} x - y = C \\ x + y = A \end{cases} \rightarrow x = \frac{A + C}{2} \text{ و } y = \frac{A - C}{2}$$

لذا می‌توان گفت:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

به همین ترتب می‌توان ثابت کرد که اگر $C = \sqrt{A^2 - B}$. آن‌گاه به شرط تعریف شدن $\sqrt{A - \sqrt{B}}$:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

مثال ۳۷: رادیکال‌های مرکب زیر را ساده کنید:

الف) $\sqrt{7 + \sqrt{40}}$

ب) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

حل: 

الف) $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{49 - 40} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{7 + \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$


$$\text{ب) } \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-\sqrt{48}}$$

$$C = \sqrt{49-48} = 1$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

مثال ۳۸: عبارت زیر را ساده کنید:

$$\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

حل: 

$$\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{27+8\left(\sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}}\right)} = \sqrt{27+8(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \sqrt{19+8\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{19+13}{2}} + \sqrt{\frac{19-13}{2}} = 4 + \sqrt{3}$$

تمرین‌های فصل هشتم

۱. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt{1024}}$

ب) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2(5 + 2\sqrt{6})$

ج) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^2} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$

د) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^4} + \sqrt[4]{4}$

هـ) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \times \sqrt[3]{5\sqrt{5}} \times \sqrt[6]{25}$

و) $\sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108}$

ز) $\sqrt[4]{5\sqrt{2}-7} \times \sqrt[4]{\sqrt{2}-1} \times (\sqrt{2}+1)$

ح) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{256}} \div \sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$

ط) $(2\sqrt{5} + \sqrt{2})^2(11 - 2\sqrt{10})$

ی) $\sqrt[3]{25 \times 2} \times \sqrt[3]{25 \times 8}$

ک) $5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108}$

ل) $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$

م) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

ن) $\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}$

س) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

ع) $\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})} \times \sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})}$

ص) $\sqrt{252} - \sqrt{700} + \sqrt{1008} - \sqrt{448}$

ف) $5\sqrt{98} - 3\sqrt{50} + 2\sqrt[4]{324}$

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{19}} \times \sqrt[3]{9+3\sqrt[3]{19}+\sqrt[3]{361}}$

ب) $\sqrt[5]{x^3} \sqrt{x^2} \sqrt[3]{x^{-1}} \div \sqrt[3]{x} \sqrt[5]{x^4} \sqrt{x^5}$

ج) $\sqrt{1+\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$

د) $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{4}{15}}$

هـ) $\sqrt{2-\sqrt[4]{3}} \times \sqrt{2+\sqrt[4]{3}} \times \sqrt{4+\sqrt{3}}$

$$\text{و)} (\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}) \div (\sqrt{12} - \sqrt{675})$$

$$\text{ز)} (2\sqrt[4]{\sqrt{5}\sqrt{16}} - 4\sqrt{2}\sqrt[4]{16} + 12\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{16}) \div (5\sqrt[4]{1}\sqrt[4]{16})$$

$$\text{ح)} \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{432} + \sqrt[3]{128}$$

$$\text{ط)} \sqrt{\frac{-1}{4} + \sqrt{\frac{-1}{4} + \dots + \sqrt{\frac{-1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}}}}}$$

$$\text{ی)} \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}$$

$$\text{ک)} \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \times \sqrt[3]{4}$$

$$\text{ل)} \sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\text{م)} \sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}} \times \sqrt[4]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}$$

$$\text{ن)} \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$\text{س)} \sqrt[4]{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^4} - \sqrt[3]{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^3} + \sqrt{48}$$

$$\text{ع)} \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}$$

$$\text{ف)} \sqrt{-1+2\sqrt{-1+2\sqrt{-1+2\sqrt{\dots}}}}$$

$$\text{ض)} (\sqrt{5}-2)^{14}(\sqrt{5}+2)^{12}$$

$$\text{ق)} (\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3})^{32}$$

۳. اگر $x = 2 - \sqrt{3}$ باشد، حاصل $x^5 - \frac{x^3}{7+4\sqrt{3}} + \frac{x}{2+\sqrt{3}} - x^2 + 1$ چیست؟

۴. اعداد $a = \sqrt{3}$ ، $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ و $c = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$ را مقایسه کنید.

۵. از دو عدد $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ و ۳ کدام بزرگ تر است؟

۶. دو عدد $\sqrt{11} - \sqrt{10}$ و $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ را مقایسه کنید.

۷. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{2}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$

ج) $\frac{8\sqrt{21}}{2\sqrt{3} + \sqrt{19} + \sqrt{7}}$

د) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$

هـ) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

و) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt{2}}$

ز) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{15}}$

ح) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}}$

ط) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$

ی) $\frac{1}{\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{2}}$

ک) $\frac{1}{\sqrt[6]{2} - 1}$

ل) $\frac{4}{\sqrt[4]{13} - \sqrt[4]{9}}$

م) $\frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16}}$

ن) $\frac{2}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}$

۸. حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{1}{3 - \sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

۹. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{57} - 40\sqrt{2} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$

ب) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{13} + \sqrt{48}}$

ج) $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{5} - \sqrt{13} + \sqrt{48}}$

$$د) \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{12}{\sqrt{6}}$$

$$هـ) \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$$

$$و) \sqrt{1+\sqrt{2} \times \sqrt{3+\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{3}}}}$$

$$ز) \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

$$ح) \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$$

۱۰. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$$

۱۱. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=1$$

۱۲. ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt[4]{\sqrt{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$$

۱۳. اگر $x \geq 0$ باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}$$

۱۴. اولاً: به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید:

$$\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ثانیاً: با استفاده از قسمت قبل حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

۱۵. اگر $\sqrt[n]{abc} = 1$ ، ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{a} + 1} + \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{bc} + \sqrt[n]{b} + 1} + \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{ac} + \sqrt[n]{c} + 1} = 1$$

۱۶. ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = 2$$

۱۷. تحت چه شرایطی تساوی زیر برقرار است؟

$$\sqrt{(a^2-1)^2b} = (1-a^2)\sqrt{b}$$

۱۸. اگر $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ و $a + b + c \neq 0$ باشد، حاصل عبارت

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a+b+c}} \text{ چیست؟}$$

۱۹. اگر $x = \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 + q^3}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 + q^3}}$ باشد، ثابت کنید:

$$x^3 + 3qx - 2r = 0$$

۲۰. اگر داشته باشیم $x = \sqrt[3]{\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}} + \sqrt[3]{\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}}$ ، نشان دهید:

$$x^3 - 3x - 2 \times \frac{a^2+b}{a^2-b} = 0$$

۲۱. اگر $0 \leq b \leq 4a$ ثابت کنید:

$$\sqrt{8a + 2\sqrt{16a^2 - b^2}} - \sqrt{8a - 2\sqrt{16a^2 - b^2}} = 2\sqrt{4a - b}$$

۲۲. اعداد زیر را به صورت صعودی مرتب کنید.

$$a = \sqrt[4]{48} \text{ و } b = \sqrt[3]{32} \times \sqrt{2} \text{ و } c = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}}$$

۲۳. حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\left[\frac{2 - \sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{4} - \sqrt{2 - \sqrt[4]{9}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt[4]{8} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right]^8$$

۲۴. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۲۵. نشان دهید:

$$\frac{\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}}{\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}} = 1$$

۲۶. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{13 + \sqrt{173}} + \frac{1}{\sqrt{173} + \sqrt{177}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1365} + \sqrt{1369}}$$

۲۷. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} = 4$$

۲۸. اگر $-2 < x < -3$ ، ساده شده عبارت زیر را بنویسید.

$$\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} + \sqrt{(|x + 2| - 1)^2}$$

۲۹. ثابت کنید:

$$\sqrt[5]{\frac{4025 + 6035 + 8045}{2045 + 3065 + 4085}} = \sqrt[3]{\frac{4023 + 6033 + 8043}{2043 + 3063 + 4083}}$$

۳۰. حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{1}{4x} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

فصل نهم

معادله و دستگاه درجه‌ی اول

معادله‌ی درجه‌ی اول یک تساوی شامل یک متغیر است که توان متغیر آن یک باشد.

عبارات $2x - 1 = 3$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{2}{3}$ مثال‌هایی از معادله‌ی یک‌مجهولی درجه‌ی اول می‌باشند.

مثال ۱: معادله‌ی $5x - 2 = 3x + 4$ را حل کنید.

حل:

$$5x - 2 = 3x + 4 \Rightarrow 5x - 3x = 4 + 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

مثال ۲: معادله‌ی $2(3x - 1) - 3(x - 2) = 2x - 1$ را حل کنید.

حل:

$$2(3x - 1) - 3(x - 2) = 2x - 1 \Rightarrow 6x - 2 - 3x + 6 = 2x - 1$$

$$3x + 4 = 2x - 1 \Rightarrow 3x - 2x = -1 - 4 \Rightarrow \boxed{x = -5}$$

مثال ۳: معادله‌ی $2x - \frac{x-1}{3} = \frac{4x+2}{3}$ را حل کنید.

حل:

$$3 \times 2x - 3 \times \frac{x-1}{3} = 3 \times \frac{4x+2}{3} \Rightarrow 6x - x + 1 = 4x + 2$$

$$5x + 1 = 4x + 2 \Rightarrow 5x - 4x = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

مثال ۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{4} + 1 = x - 8$$

حل: 

$$12 \times \frac{x-1}{3} - 12 \times \frac{x-2}{4} + 12 \times 1 = 12(x-8)$$

$$4(x-1) - 3(x-2) + 12 = 12x - 96$$

$$4x - 4 - 3x + 6 + 12 = 12x - 96 \Rightarrow x + 14 = 12x - 96 \Rightarrow 110 = 11x \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

مثال ۵: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 5x = 0$

ب) $(2x-1)^2 = 49$

ج) $9x^2 = (2x-10)^2$

د) $(7x-2)^2 = (6x-11)^2$

حل: 

الف) $x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x-5) = 0$

$$\boxed{x = 0}$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow \boxed{x = 5}$$

ب) $(2x-1)^2 = 49$

$$2x-1=7 \Rightarrow 2x=8 \rightarrow x=4$$

$$2x-1=-7 \Rightarrow 2x=-6 \rightarrow x=-3$$

ج) $9x^2 = (2x-10)^2$

$$3x = 2x - 10 \Rightarrow x = -10$$

$$3x = -2x + 10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

د) $(7x-2)^2 = (6x-11)^2$

$$7x-2=6x-11 \Rightarrow 7x-6x=-11+2 \Rightarrow x=-9$$

$$7x-2=-6x+11 \Rightarrow 7x+6x=11+2 \Rightarrow 13x=13 \Rightarrow x=1$$

مثال ۶: معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x^2+7}{4x^2-9} = \frac{2}{2x+3} - \frac{x-1}{6-4x}$$

حل: 

ابتدا دامنه‌ی تعریف معادله را تعیین می‌کنیم.

$$2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$4x^2-9=0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

$$2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$6-4x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$\frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+7)}{4x^2-9} = \frac{2(6-4x) - (2x+3)(x-1)}{(2x+3)(6-4x)}$$

$$\frac{2x^2+2x+3x+3-x^2-7}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{12-8x-2x^2+2x-3x+3}{-2(2x+3)(2x-3)}$$

$$x^2+5x-4 = \frac{-2x^2-9x+15}{-2}$$

$$-2x^2-10x+8 = -2x^2-9x+15$$

$$-10x+9x = 15-8 \Rightarrow -x = 7 \rightarrow x = -7$$

حل مسئله به کمک معادله

مثال ۷: مجموع سه عدد فرد متوالی ۱۳۵ است. آن سه عدد کدامند؟

حل: اگر عدد نخست را x فرض کنیم عدد دوم $x+2$ و عدد سوم $x+4$ می‌باشند.

$$x+x+2+x+4=135 \Rightarrow 3x+6=135$$

$$\Rightarrow 3x=135-6 \Rightarrow 3x=129 \Rightarrow x=43$$

$$x+2=43+2=45 \text{ و } x+4=43+4=47$$

مثال ۸: سعید ۱۰۰۰۰ ریال و سارا ۱۲۰۰۰ ریال پول دارند. سعید روزی ۲۰۰۰ ریال و سارا روزی ۱۵۰۰ ریال پس انداز می کنند. پس از چند روز پول آن ها مساوی می شود؟

حل: 

$$2000x + 10000 = 1500x + 12000$$

$$2000x - 1500x = 12000 - 10000$$

$$500x = 2000 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

مثال ۹: پدری ۳۸ سال و پسرش ۸ سال دارد. پس از چند سال سن پدر سه برابر سن پسر می شود؟

حل: 

فرض می کنیم پس از x سال چنین شود. پس از x سال سن پدر $38 + x$ و سن پسر $8 + x$ سال می شود.

$$38 + x = 3(8 + x) \Rightarrow 38 + x = 24 + 3x$$

$$\Rightarrow 38 - 24 = 3x - x \Rightarrow 14 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 7}$$

مثال ۱۰: عددی را بر اعداد ۵، ۷ و ۸ تقسیم کرده ایم. باقی مانده ها به ترتیب ۲، ۵ و ۷ و مجموع خارج قسمت ها برابر ۲۰ شده. این عدد چیست؟

$$\text{باقیمانده} - \text{مقسوم} = \text{خارج قسمت} \\ \text{مقسوم علیه}$$

نکته:

حل: 

$$\frac{x-2}{5} + \frac{x-5}{7} + \frac{x-7}{8} = 20$$

$$280 \times \frac{x-2}{5} + 280 \times \frac{x-5}{7} + 280 \times \frac{x-7}{8} = 280 \times 20$$

$$56(x-2) + 40(x-5) + 35(x-7) = 5600$$

$$56x - 112 + 40x - 200 + 35x - 245 = 5600 \Rightarrow 131x - 557 = 5600$$

$$131x = 5600 + 557 \Rightarrow 131x = 6157 \Rightarrow \boxed{x = 47}$$

مثال ۱۱: منصور می‌خواهد برای هر کدام از دوستان خود یک کتاب هدیه بخرد. اگر کتاب ۷۰۰۰ تومانی بخرد ۲۹۰۰ تومان پول کم می‌آورد و اگر کتاب ۵۰۰۰ تومانی بخرد ۷۱۰۰ تومان برایش باقی می‌ماند. منصور چه قدر پول دارد؟

 حل:

فرض می‌کنیم تعداد دوستان منصور x باشد.

$$7000x - 2900 = 5000x + 7100$$

$$7000x - 5000x = 7100 + 2900 \Rightarrow 2000x = 10000 \Rightarrow x = 5$$

$$5000 \times 5 + 7100 = 32100 \text{ کل پول منصور}$$

مثال ۱۲: سعید ۵ برابر مسعود پول دارد. اگر سعید ۱۵۰۰ تومان به مسعود بدهد، پولش دو برابر پول مسعود می‌شود. معین کنید هر کدام چه قدر پول دارند؟

 حل:

پول سعید x

پول مسعود y

$$5x - 1500 = 2(x + 1500)$$

$$5x - 1500 = 2x + 3000 \Rightarrow 5x - 2x = 3000 + 1500$$

$$3x = 4500 \Rightarrow x = 1500 \text{ پول مسعود}$$

$$5 \times 1500 = 7500 \text{ پول سعید}$$

مثال ۱۳: آزمون ورودی دبیرستان مهرآئین شامل ۱۰۰ سؤال است. در این آزمون به هر پاسخ درست ۵ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ غلط ۲ نمره‌ی منفی و به سؤالاتی که پاسخ داده نشده امتیازی تعلق نمی‌گیرد. دانش‌آموزی در آزمون ورودی این مدرسه شرکت می‌کند و به تمام سؤالات پاسخ می‌دهد و نمره‌ی او برابر ۲۷۶ می‌شود. او به چند سؤال درست پاسخ داده است؟

 حل:

فرض می‌کنیم او به x سؤال پاسخ درست داده باشد، در این صورت به $100 - x$ سؤال پاسخ غلط داده است.

$$5x + (100 - x) \times (-2) = 276$$

$$5x - 200 + 2x = 276 \Rightarrow 7x = 276 + 200$$

$$7x = 476 \Rightarrow x = 68$$

حل و بحث معادلات یک مجهولی درجه‌ی اول

هر معادله‌ی درجه‌ی اول یک مجهولی پس از ساده کردن به صورت $ax = b$ درمی‌آید که در آن

$a \neq 0$ می‌باشد. $x = \frac{b}{a}$ جواب معادله است.

اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد، معادله به صورت $0 \times x = b$ درمی‌آید که جواب ندارد. چنین معادلاتی را معادلات غیرممکن می‌نامیم.

اگر $a = 0$ و $b = 0$ باشد، معادله به صورت $0 \times x = 0$ درمی‌آید که بیشمار جواب دارد. چنین معادلاتی را معادلات مبهم می‌گویند.

مثال ۱۴: معادله‌ی $2(x - 1) = 2x + 3$ را حل کنید.

 حل:

$$2(x - 1) = 2x + 3$$

$$2x - 2 = 2x + 3 \Rightarrow 2x - 2x = 3 + 2 \Rightarrow 0x = 5$$

این معادله غیرممکن است و جواب ندارد.

مثال ۱۵: معادله‌ی $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$ را حل کنید.

 حل:

$$2 \times \frac{2x+1}{2} = 2 \times x + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$2x + 1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x - 2x = 1 - 1 \Rightarrow 0x = 0$$

این معادله مبهم است و هر عدد حقیقی در آن صدق می‌کند. لذا معادله بی‌شمار جواب دارد.

مثال ۱۶: معادله‌ی زیر را حل و بحث کنید.

$$m^2x - m = x + 1$$

 حل:

$$m^2x - x = m + 1 \Rightarrow (m^2 - 1)x = m + 1$$

اگر $m^2 - 1 \neq 0$ به عبارت دیگر m برابر ۱ یا -۱ نباشد، خواهیم داشت:

$$x = \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{m+1}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m-1}$$

اگر $m^2 - 1 = 0$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$m = 1 \Rightarrow (1^2 - 1)x = 1 + 1 \Rightarrow 0x = 2$$

معادله غیرممکن است و جواب ندارد.

$$m = -1 \Rightarrow [(-1)^2 - (-1)]x = -1 + 1 \Rightarrow 0x = 0$$

معادله مبهم هست و بیشمار جواب دارد.

مثال ۱۷: معادله‌ی زیر را حل و بحث کنید.

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a - b$$

حل: 

$$\frac{bx - ax}{ab} = a - b \Rightarrow (b - a)x = -ab(b - a)$$

$$x = \frac{-ab(b - a)}{b - a} = -ab$$

اگر $b - a \neq 0$ یا $b \neq a$ باشد، معادله یک جواب دارد.

اگر $b - a = 0$ یا $a = b$ باشد، معادله به صورت $0 \times x = 0$ درمی‌آید که مبهم است و بیشمار جواب دارد.

مثال ۱۸: معادله‌ی زیر را حل و بحث کنید.

$$\frac{a(x-a)}{b} + \frac{b(x-b)}{a} = x \quad (a, b > 0)$$

حل: 

$$\frac{a^2(x-a) + b^2(x-b)}{ab} = x \Rightarrow a^2x - a^3 + b^2x - b^3 = abx$$

$$a^2x + b^2x - abx = a^3 + b^3 \Rightarrow (a^2 + b^2 - ab)x = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$$

با توجه به این که a و b مخالف صفر می باشند، می توان گفت $a^2 + b^2 - ab \neq 0$ زیرا:

$$a^2 + b^2 - ab = (a - b)^2 + ab \neq 0$$

بنابراین $x = a + b$ جواب معادله است.

دستگاه معادلات درجه ی اول

معادله ی $x + y = 16$ دارای بیشمار جواب است. هم چنین معادله ی $x - y = 2$ نیز دارای بیشمار جواب است. اما فقط یک جفت عدد وجود دارد که در هر دو معادله $x + y = 16$ و $x - y = 2$ صدق می کند. این اعداد در واقع جواب دستگاه زیر می باشند.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

$$(x + y) + (x - y) = 18 \Rightarrow 2x = 18 \rightarrow x = 9$$

$$9 + y = 16 \rightarrow y = 7$$

مثال ۱۹: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 7x - 2y = 16 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$$

حل: 

$$\begin{cases} 14x - 4y = 32 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$19x = 38 \Rightarrow x = 2$$

$$7 \times 2 - 2y = 16 \Rightarrow -2y = 16 - 14 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = -1$$

مثال ۲۰: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 15x + 7y = 8 \\ 10x + 11y = -1 \end{cases}$$

حل: 

با توجه به این که کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد ۱۵ و ۱۰ برابر ۳۰ می باشد، معادله ی

$$\frac{30}{15} = 2 \text{ در } 15 \text{ و معادله ی دوم را در } -3 = \frac{30}{-10} \text{ ضرب می کنیم.}$$

$$\begin{cases} 30x + 14y = 16 \\ -30x - 33y = 3 \end{cases}$$

$$-19y = 19 \Rightarrow y = -1$$

$$15x + 7 \times (-1) = 8 \Rightarrow 15x = 15 \Rightarrow x = 1$$

مثال ۲۱: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}$$

حل: 

$$\begin{cases} 5x + 5y = 4x - 3 \\ 14x + 42y = 15 - 9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = -3 \\ 14x + 51y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14x - 70y = 42 \\ 14x + 51y = 15 \end{cases}$$

$$-19y = 57 \Rightarrow y = -3$$

$$x + 5 \times (-3) = -3 \Rightarrow x - 15 = -3 \Rightarrow x = 12$$

مثال ۲۲: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

حل: 

$$\begin{cases} -2x - 6y = -14 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$0 = -9$$

طرفین دو معادله را با هم جمع کردیم. مجهول‌ها از بین رفتند و تساوی حاصل یک تساوی نادرست است. بنابراین دستگاه جواب ندارد. چنین دستگاه‌هایی را **غیرممکن** می‌نامیم.

مثال ۲۳ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 8x + 10y = 6 \end{cases}$$

حل: 

$$\begin{cases} -8x - 10y = -6 \\ 8x + 10y = 6 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

طرفین دو معادله را با هم جمع کردیم. مجهول‌ها از بین رفتند ولی تساوی به دست آمده یک تساوی درست است. بنابراین دستگاه بیشمار جواب دارد. چنین دستگاه‌هایی را **مبهم** می‌نامیم.

مثال ۲۴ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 34 \\ 4x - 7y + z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 22 \end{cases}$$

حل: 

از معادله‌ی درجه‌ی دوم z را بر حسب x و y حساب کرده و در دو معادله‌ی دیگر جایگزین می‌کنیم تا دستگاهی دومجهولی بر حسب x و y ساخته شود.

$$4x - 7y + z = 3 \rightarrow z = 3 - 4x + 7y$$

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2(3 - 4x + 7y) = 34 \\ 2x + 3y - 2(3 - 4x + 7y) = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 6 + 8x - 14y = 34 \\ 2x + 3y - 6 + 8x - 14y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \times \{15x - 16y = 43\} \\ -3 \times \{10x - 11y = 28\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x - 32y = 86 \\ -30x + 33y = -84 \end{cases}$$

$$y = 2$$

$$15x - 32 = 43 \Rightarrow 15x = 75 \Rightarrow x = 5$$

$$z = 3 - 4 \times 5 + 7 \times 2 = 3 - 20 + 14 = -3$$

مثال ۲۵ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \\ 3x - 2y - 5z = 78 \end{cases}$$

حل: 

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 5k \\ z = 7k \end{cases}$$

$$3 \times 2k - 2 \times 5k - 5 \times 7k = 78 \Rightarrow 6k - 10k - 35k = 78 \Rightarrow -39k = 78 \Rightarrow k = -2$$

$$x = 2 \times (-2) = -4$$

$$y = 5 \times (-2) = -10$$

$$z = 7 \times (-2) = -14$$

مثال ۲۶ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{5}{y} = 25 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 19 \end{cases}$$

حل: 

فرض می‌کنیم $\frac{1}{x} = A$ و $\frac{1}{y} = B$

$$\begin{cases} 7A - 5B = 25 \\ 3A + 2B = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14A - 10B = 50 \\ \underline{15A + 10B = 95} \end{cases}$$

$$29A = 145 \Rightarrow A = 5$$


$$3 \times 5 + 2B = 19 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{1}{x} = 5 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{y} = 2 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۷ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{12}{x-3} - \frac{5}{y+2} = 63 \\ \frac{8}{x-3} + \frac{15}{y+2} = -13 \end{cases}$$

حل: 

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} &= A & \frac{1}{y+2} &= B \\ \begin{cases} 12A - 5B = 63 \\ 8A + 15B = -13 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 36A - 15B = 189 \\ 8A + 15B = -13 \end{cases} \end{aligned}$$

$$44A = 176 \Rightarrow A = 4$$

$$8 \times 4 + 15B = -13 \Rightarrow 15B = -45 \Rightarrow B = -3$$

$$\frac{1}{x-3} = 4 \Rightarrow 4x - 12 = 1 \rightarrow x = \frac{13}{4}$$

$$\frac{1}{y+2} = -3 \Rightarrow -3y - 6 = 1 \rightarrow y = \frac{-7}{3}$$

تمرین‌های فصل نهم

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5(2x - 3) - 2(3x - 1) = 11$

ب) $\frac{2x - 7}{9} - \frac{x - 5}{6} = \frac{x - 9}{8}$

ج) $\frac{x}{x - 3} = \frac{x + 1}{x - 4}$

د) $\frac{3x - 7}{4x + 2} - \frac{3x - 14}{4x - 13} = 0$

هـ) $(2x - 6)(x^2 - 25) = 0$

و) $(x + 2)^2 - x^2 + 4 = 0$

ز) $27x^2(x + 3) - 12(x^2 + 3x) = 0$

ح) $(2x + 3)(4x - 1) = 9 - 4x^2$

ط) $4x^2 - 16x + 15 = 0$

ی) $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$

۲. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x - 1}{x - 2} + \frac{x}{x + 2} - \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4} = 0$

ب) $\frac{5}{x - 2} - \frac{3}{2x + 4} = \frac{3x - 1}{x^2 - 4}$

ج) $\frac{3}{3 - x} + \frac{4}{3 + x} = \frac{8 + 3}{9 - x^2}$

د) $\frac{2x - 7}{9} - \frac{x - 5}{6} = \frac{x - 9}{8}$

هـ) $\frac{1 - \frac{5}{x + 2}}{\frac{x}{x + 2}} = 2$

و) $\frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{3}{5}$

ز) $\frac{2}{x + 5} + \frac{20}{x^2 - 25} = \frac{3}{5 - x}$

ح) $\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{3x - 6}$

ط) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x + 3} + \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = 0$

ی) $\frac{4(x + 3)}{9} = \frac{8x + 37}{18} - \frac{7x - 29}{5x - 12}$

ک) $\frac{x + 5}{x + 4} - \frac{x - 6}{x - 7} = \frac{x - 4}{x - 5} - \frac{x - 15}{x - 16}$

ل) $\frac{x + 2}{x} + \frac{x - 7}{x - 5} - \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{x - 6}{x - 4}$

۳. مجموع نصف و ثلث و ربع عددی ۱۳ است. آن عدد چیست؟

۴. علی پنج برابر رضا پول دارد. اگر علی ۱۰۰ ریال به رضا بدهد، پول او دو برابر پول رضا می‌شود. هر کدام چه قدر پول دارند؟

۵. در یک مزرعه تعدادی گوسفند و مرغ وجود دارد. اگر تعداد سرها را بشماریم جمعاً ۲۵ سر می‌بینیم. اگر تعداد پاها را بشماریم جمعاً ۸۶ پا می‌بینیم. تعداد مرغها و تعداد گوسفندان را حساب کنید.

۶. از ایستگاهی یک قطار باری حرکت می‌کند. دو ساعت و نیم بعد قطار مسافربری در همان مسیر با سرعت ۱۰ کیلومتر بیش‌تر از سرعت قطار باری راه می‌افتد و بعد از ۱۵ ساعت به اندازه‌ی ۲۵ کیلومتر از آن جلو می‌افتد. سرعت قطار باری چند کیلومتر بر ساعت است؟

۷. حسین می‌خواهد از پس‌انداز خود هر روز نصف آن را به اضافه‌ی ۲۰ ریال خرج کند. اگر بعد از سه روز پس‌انداز او تمام شود، تعیین کنید پس‌انداز او چه قدر بوده است؟

۸. سن پدری ۴۶ سال و سن فرزندش ۸ سال است. پس از چند سال سن پدر سه برابر سن فرزندش می‌شود؟

۹. شخصی می‌خواهد فاصله‌ی دو شهر A و B را با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت بپیماید. یک ساعت پس از حرکت او کالسه‌ای با سرعت ۱۲ کیلومتر بر ساعت از A به طرف B حرکت می‌کند و چون به شخص می‌رسد او را سوار می‌کند و مسافت آن نقطه تا شهر B را در دو ساعت طی می‌کند. فاصله‌ی دو شهر A و B چه قدر است؟

۱۰. پنج برابر پول منصور همان قدر از ۱۵۰۰ تومان بیش‌تر است که از ۴۵۰۰ تومان کم‌تر، پول منصور چه قدر است؟

۱۱. پول سعید از دو برابر پول نادر ۵ تومان بیش‌تر است. پول کامران سه برابر مجموع پول سعید و نادر می‌باشد. اگر سه نفری روی هم ۱۵۶۲۰ تومان پول داشته باشند، پول هر کدام چه قدر است؟

۱۲. دانش‌آموزی در یک امتحان تستی که شامل ۱۰۰ سؤال است، شرکت می‌کند. مقررات آزمون چنین است که به هر سؤال درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر سؤال غلط یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد و برای سوالاتی که پاسخ داده نشده هیچ امتیازی منظور نمی‌شود. اگر این دانش‌آموز به تمام سوالات پاسخ داده و نمره‌ی آزمون او ۲۵۲ شده باشد، چند سؤال را درست و چند سوال را غلط جواب داده است؟

۱۳. در کلاسی اگر قرار باشد روی هر نیمکت چهار نفر بنشینند ۲ نیمکت خالی می‌ماند و اگر روی هر نیمکت ۳ نفر بنشینند ۴ نفر بدون جا می‌مانند. تعداد دانش‌آموزان کلاس چند نفرند؟

۱۴. مجتبی مجموعاً ۹۰ سکه به ارزش ۱۳۵۰ ریال از سکه‌های ۵ ریالی و ۵ تومانی دارد. او از هر سکه چندتا دارد؟

۱۵. یک لوله‌ی آب ۲ ساعت دیرتر و لوله‌ی آب دیگر ۴/۵ ساعت دیرتر از موقعی که هر دو لوله باز باشند، استخری را پر از آب می‌کنند. هریک از دو لوله به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کنند؟

۱۶. معادلات پارامتری زیر را حل و بحث کنید.

الف) $(m^2 - 1)x = m^2 + 3m + 2$

ب) $m^2x = m(x + 2) - 2$

ج) $m^2(x - 2) - 3m = x + 1$

د) $x - \frac{2}{m^3} = \frac{1}{m^2}(4x + 1)$

هـ) $a^2x + 4 = a(x + 2) + b$

و) $(x - a)(2x - b)^2 - (x - b)(2x - a)^2 = 0$

ز) $\frac{x+a}{a} - \frac{x-2a}{a} = 3$

ح) $\frac{x+a-b}{a} - \frac{x+b-a}{b} = \frac{b^2 - a^2}{ab}$

ط) $\frac{x+1}{1-x} = \frac{a+b+1}{a+b-1}$

ی) $\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x+a-b}$

۱۷. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} 6y - 5x = 18 \\ 12x - 9y = 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 39x - 8y = 99 \\ 52x - 15y = 80 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 3x = 7y \\ 12y = 5x - 1 \end{cases}$

د) $\begin{cases} 8x = 5y \\ 13x = 8y + 1 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} 3(x+y) = 1-y \\ 5x + 2y = 3 - 4x - 10y \end{cases}$

و) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 + x + 3y \\ 7x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$

$$ز) \begin{cases} \frac{1-x-y}{2} = \frac{x-y-2}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{x}{3} - \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$ط) \begin{cases} 3x\sqrt{2} + 2y = 8 \\ x\sqrt{2} - y = 1 \end{cases}$$

$$ح) \begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{y-x}{2} = 10 \end{cases}$$

$$س) \begin{cases} 5x\sqrt{5} - 7y\sqrt{3} = 29 \\ \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 \end{cases}$$

۱۸. دستگاه‌های زیر را حل کنید:

$$الف) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{8}{15} \\ 9y - 22x = \frac{3xy}{25} \end{cases}$$

$$ب) \begin{cases} \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = 2 \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{2x} = 1 \end{cases}$$

$$ج) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} + \frac{5}{2} = 0 \\ \frac{4}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} + \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$$

$$د) \begin{cases} \frac{2}{3x+y-2} + \frac{3}{x+4y+1} + \frac{7}{24} = 0 \\ \frac{1}{3x+y-2} + \frac{2}{x+4y+1} + \frac{7}{12} = 0 \end{cases}$$

$$ه) \begin{cases} 3\sqrt{4x+2y} - 5\sqrt{2x-y} = 2 \\ \sqrt{4x+2y} + 2\sqrt{2x-y} = 22 \end{cases}$$

$$و) \begin{cases} \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4} \\ 3x - 2y + 7z = 251 \end{cases}$$

$$ز) \begin{cases} \frac{4}{2x-1} + \frac{3}{6y+4} = 21 \\ \frac{5}{6x-3} - \frac{2}{15y+10} = 19 \end{cases}$$

۱۹. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{8}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

۲۰. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 8 \\ x + 3y + 9z = 27 \end{cases}$$

۲۱. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است. اگر جای ارقام این عدد را برعکس کنیم ۳۶ واحد به آن افزوده می‌شود. آن عدد چیست؟

۲۲. مبلغی را می‌خواستند بین عده‌ای تقسیم کنند. به هر نفر ۱۰۰۰ ریال می‌رسید. در موقع تقسیم ۲ نفر از این عده کم شدند و در نتیجه به هر یک ۱۲۰۰ ریال رسید. مبلغ و تعداد افراد را تعیین کنید.

۲۳. برای تشکیل شرکتی قرار شد ۱۵ نفر مشترکاً ۱۲۰۰۰ تومان بپردازند. چند نفر از شراکت خودداری کردند و سایرین هر کدام ۴۰۰ تومان بیش‌تر پرداختند تا سرمایه‌ی شرکت تأمین شد. تعداد شرکاء را تعیین کنید.

۲۴. دانش‌آموزی با پدرش قرار گذاشت که در هر امتحان که نمره‌ی خوب بگیرد ۸۰۰۰ ریال از پدرش بگیرد و در هر امتحان که نمره‌ی بد بگیرد ۵۰۰۰ ریال جریمه بدهد. بعد از گذراندن ۸ امتحان او ۳۸۰۰۰ ریال پول داشت. معین کنید او در چند امتحان نمره‌ی خوب و در چند امتحان نمره‌ی بد گرفته است؟

۲۵. امیر از فرید پرسید چند سال داری؟ او گفت وقتی تو به سن امروز من برسی من دو برابر سن امروز تو سن خواهم داشت. اگر مجموع سن امیر و فرید ۳۰ سال باشد، سن هر کدام چه‌قدر است؟

۲۶. عدد سه رقمی را پیدا کنید که رقم دهگان آن صفر و مجموع ارقام آن ۱۱ باشد و اگر جای ارقام آن را عوض کنیم عدد حاصل ۴۹۵ واحد از عدد نخست بیش تر شود.

۲۷. شخصی با ۱۸۶۲ تومان مقداری سیب و پرتقال خرید. قیمت هر سه پرتقال ۲ تومان و قیمت هر ۱۲ سیب ۵ تومان است. اگر تعداد پرتقال‌هایی که خریده ۵ برابر تعداد فعلی و تعداد سیب‌ها $\frac{1}{4}$ تعداد فعلی می‌بود ۵۷۰۰ تومان می‌پرداخت. تعداد سیب‌ها و پرتقال‌ها چند تا است؟

۲۸. چند دروگر باید دو مزرعه را درو کنند. آن‌ها از صبح روی مزرعه‌ی بزرگ‌تر شروع به کار کردند. بعد از نصف روز کار به ۲ قسمت شدند. $\frac{2}{3}$ دروگران روی مزرعه‌ی اول باقی ماندند و آن‌را تا عصر به آخر رساندند و بقیه مشغول درو مزرعه‌ی دوم که ثلث مزرعه‌ی اول بود شدند. اگر بدانیم در جریان روز بعد تنها ۴ دروگر برای اتمام کار در مزرعه‌ی دوم کافی باشد، تعداد دروگرها را حساب کنید.

۲۹. در دستگاه دهدهی اگر از نماد دو رقمی عددی ۱۸ واحد کم کنیم، جای ارقام عدد عوض می‌شود. چنانچه رقم یکان عدد ۳ واحد از دو برابر رقم دهگان آن کم‌تر باشد، آن عدد چیست؟

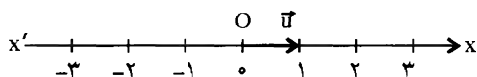
۳۰. لاستیک جلوی اتومبیلی بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک عقب آن پس از ۱۵۰۰۰ کیلومتر سائیده می‌شوند. بعد از چند کیلومتر حرکت جای لاستیک جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم در یک زمان سائیده شوند؟

👉 فصل دهم

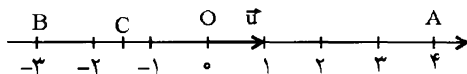
معادله‌ی خط

☆ محور

محور خطی است جهت‌دار که روی آن یک نقطه به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم. جهت از چپ به راست را جهت مثبت و خلاف آن را جهت منفی اختیار می‌کنیم. برای هر محور یک واحد اندازه‌گیری انتخاب می‌کنیم که بردار یکانی (بردار واحد) محور نامیده می‌شود. **بردار یکانی برداری است هم‌جهت با جهت مثبت محور و اندازه‌ی آن یک واحد محور می‌باشد.** در شکل زیر بردار u بردار یکانی محور می‌باشد.



مثال ۱: در شکل زیر بردارهای \overrightarrow{OA} ، \overrightarrow{OB} و \overrightarrow{OC} را بر حسب \vec{u} بنویسید.



✎ حل:

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{u}$$

$$\overrightarrow{OB} = -3\vec{u}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{3}{2}\vec{u}$$

در این مثال طول نقطه‌ی A برابر ۴، طول نقطه‌ی B برابر ۳- و طول نقطه‌ی C برابر $-\frac{3}{2}$ است.

$$x_A = 4$$

$$x_B = -3$$

$$x_C = -\frac{3}{2}$$

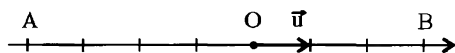
به‌طور کلی اگر $\overrightarrow{OA} = m\vec{u}$ باشد، آن‌گاه: $x_A = m$

☆ اندازه‌ی جبری یک بردار

اگر O مبدأ محور و A نقطه‌ی دلخواهی روی محور باشد و $\overrightarrow{OA} = m\vec{u}$ آن‌گاه اندازه‌ی جبری \overrightarrow{OA} که آن‌را به صورت \overline{OA} نشان می‌دهیم برابر m می‌باشد. بدیهی است اندازه‌ی جبری بردار OA با طول نقطه‌ی A مساوی است. $\overline{OA} = x_A$

طول بردار OA را نیز به صورت $|\overrightarrow{OA}|$ نشان می‌دهیم. $|\overrightarrow{OA}| = |m|$

مثال ۲: در شکل زیر اندازه‌ی جبری بردارهای \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BA} را مشخص کنید.



حل:

$$\overrightarrow{AB} = v\vec{u} \Rightarrow \overline{AB} = v$$

$$\overrightarrow{BA} = -v\vec{u} \Rightarrow \overline{BA} = -v$$

نکته: به طور کلی $\overline{AB} = -\overline{BA}$

مثال ۳: در شکل زیر ثابت کنید: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$



حل:

فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AB} = m\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC} = n\vec{u}$. بنابراین $\overline{AB} = m$ و $\overline{BC} = n$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = m\vec{u} + n\vec{u} = (m+n)\vec{u} \Rightarrow \overline{AC} = m+n$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

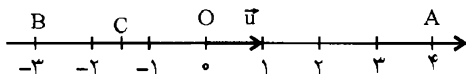
رابطه‌ی شال: به طور کلی برای هر سه نقطه‌ی واقع بر یک محور رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

قضیه: اندازه‌ی جبری هر بردار واقع بر یک محور برابر است با:

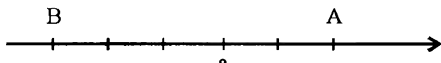
طول ابتدا - طول انتها

برهان: دو نقطه‌ی A و B را روی محور $x'Ox$ در نظر می‌گیریم:



بر اساس رابطه‌ی شال داریم: $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_B - x_A$

مثال ۴: در شکل زیر $x_A = +2$ و $x_B = -3$. اندازه‌ی جبری \overline{AB} و \overline{BA} را به دست آورید.



حل:

$$\overline{AB} = x_B - x_A = -3 - (+2) = -5$$

$$\overline{BA} = x_A - x_B = 2 - (-3) = +5$$

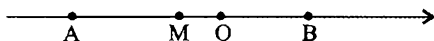
مثال ۵: اگر $x_A = -1$ و $x_B = 2$ و $x_C = -2$ و $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ باشد x_D چه قدر است؟

حل:

$$\overline{AB} = 2\overline{CD} \Rightarrow x_B - x_A = 2(x_D - x_C)$$

$$\Rightarrow 2 - (-1) = 2[x_D - (-2)] \Rightarrow 3 = 2x_D + 4 \Rightarrow x_D = -\frac{1}{2}$$

مثال ۶: در شکل زیر M وسط AB است. ثابت کنید $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.



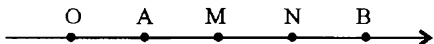
حل:

$$\overline{AM} = \overline{MB} \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

مثال ۷: در شکل زیر نقاط M و N پاره خط AB را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر $x_A = a$ و $x_B = b$ و $x_M = m$ باشند، ثابت کنید:

$$m = \frac{2a + b}{3}$$



حل: 

$$\overline{AB} = 3\overline{AM}$$

$$b - a = 3(m - a) \Rightarrow b - a = 3m - 3a$$

$$b - a + 3a = 3m$$

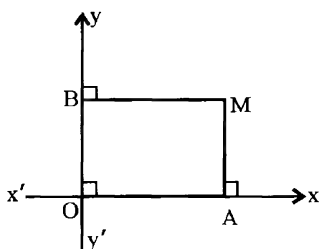
$$2a + b = 3m$$

$$m = \frac{2a + b}{3}$$

نکته: اگر نقطه‌ی A به طول a و نقطه‌ی B به طول b روی یک محور باشند، آن‌گاه فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B برابر است با: $|a - b|$

☆ دستگاه مختصات دکارتی

در یک صفحه دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ را عمود بر هم رسم کرده، نقطه‌ی O فصل مشترک آن‌ها را مبدأ مشترک دو محور اختیار می‌کنیم. محور $x'Ox$ را محور طول و محور $y'Oy$ را محور عرض می‌نامیم. شکلی را که به این ترتیب ساخته می‌شود دستگاه مختصات دکارتی می‌گویند.

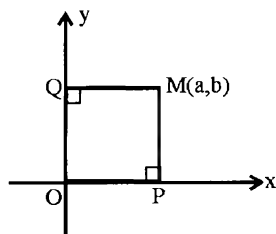


نقطه‌ی M را در صفحه‌ی مختصات در نظر گرفته و از آن نقطه‌ی عمودهای MA و MB را به ترتیب بر محور $x'Ox$ و $y'Oy$ رسم می‌کنیم.

اندازه‌ی جبری بردار \overrightarrow{OA} را طول نقطه‌ی M و اندازه‌ی جبری بردار \overrightarrow{OB} را عرض نقطه‌ی M می‌نامند. طول نقطه‌ی M را با x_M و عرض آن را با y_M نشان می‌دهند.

نقطه‌ی M به طول a و به عرض b را به صورت $M(a, b)$ نشان می‌دهند که آن را M به مختصات a و b می‌خوانیم.

هر نقطه را که مختصات آن معلوم باشد، می‌توان در صفحه‌ی مختصات پیدا کرد.



اگر $M(a, b)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، برای نشان دادن نقطه‌ی M کافی است نقطه‌ی P را به طول $\overline{OP} = a$ روی محور طول و نقطه‌ی Q را به عرض $\overline{OQ} = b$ روی محور عرض معین کرده و از نقاط P و Q دو عمود به ترتیب بر محور طول و محور عرض رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در نقطه‌ای قطع کنند. این نقطه‌ی تقاطع همان نقطه‌ی $M(a, b)$ می‌باشد.

به این ترتیب هر نقطه‌ی صفحه‌ی مختصات با یک جفت عدد حقیقی متناظر است و هر جفت عدد حقیقی را می‌توان با نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات متناظر دانست. در این صورت بین مجموعه‌ی نقاط واقع در صفحه‌ی مختصات و مجموعه‌ی جفت‌های مرتب از اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک وجود دارد.

نکته: دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه‌ی

مختصات را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. در ناحیه‌ی اول طول و عرض مثبت در ناحیه‌ی دوم طول منفی و عرض مثبت و در ناحیه‌ی سوم طول و عرض منفی و در ناحیه‌ی چهارم طول مثبت و عرض منفی است. هم‌چنین هر نقطه واقع بر محور طول عرضش صفر و هر نقطه‌ی واقع بر محور عرض، طولش صفر است.

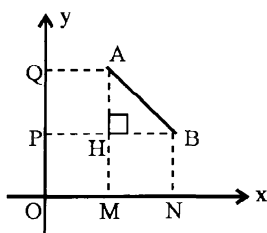
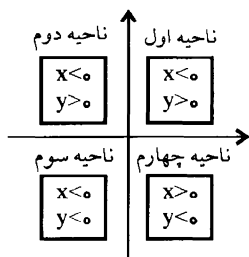
☆ فاصله‌ی دو نقطه بر حسب مختصات آن‌ها

دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را در صفحه‌ی مختصات xOy در نظر بگیرید. می‌خواهیم فاصله‌ی این دو نقطه یعنی طول پاره‌خط AB را بر حسب مختصات A و B به‌دست آوریم.

از نقاط A و B خطوطی بر هر دو محور عمود می‌کشیم. خواهیم داشت:

$$\overline{HB} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = x_2 - x_1$$

$$\overline{HA} = \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = y_1 - y_2$$



بنابر قضیه ی فیثاغورس:

$$AB^2 = HB^2 + HA^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

نکته: فاصله ی مبدأ مختصات از نقطه ی $M(a, b)$ از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال ۸: فاصله ی دو نقطه ی $A(5, -3)$ و $B(2, 1)$ را حساب کنید.

حل:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

☆ مختصات وسط یک پاره خط بر حسب مختصات دو سر آن

دو نقطه ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را در صفحه ی

مختصات در نظر می گیریم. می خواهیم مختصات نقطه ی M وسط پاره خط AB را بر حسب مختصات A و B به دست آوریم.

برای این منظور از نقاط A و B و M خطوطی بر دو محور

عمود می کنیم تا به ترتیب محور طول را در نقاط A' و

B' و M' و محور عرض را در نقاط A'' و B'' و M''

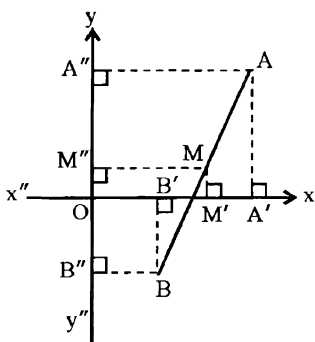
قطع کنند.

نقطه ی M' وسط پاره خط $A'B'$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \overline{B'M'} &= \overline{M'A'} \Rightarrow \overline{OM'} - \overline{OB'} = \overline{OA'} - \overline{OM'} \Rightarrow 2\overline{OM'} = \overline{OA'} + \overline{OB'} \\ \Rightarrow \overline{OM'} &= \frac{\overline{OA'} + \overline{OB'}}{2} \Rightarrow x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}} \end{aligned}$$

به همین ترتیب ثابت می شود:

$$\boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$



مثال ۹: اگر $A(1, -4)$ و $B(-5, -2)$ دو سر یک پاره خط باشند مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB چیست؟

حل: 

$$x_M = \frac{1 + (-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

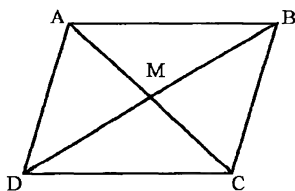
$$y_M = \frac{-4 + (-2)}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow M(-2, -3)$$

مثال ۱۰: در یک دستگاه محورهای مختصات دکارتی اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد، ثابت کنید:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

حل: 



$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}$$

$$\Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

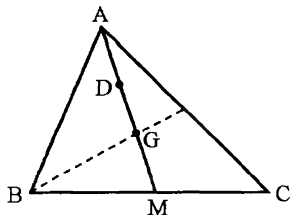
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$\Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$

مثال ۱۱: اگر G نقطه‌ی تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

حل: 



می‌دانیم نقطه‌ی برخورد میانه‌ها هر میانه را به نسبت ۲ و ۱ تقسیم می‌کند. $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$. فرض می‌کنیم D وسط BC باشد.

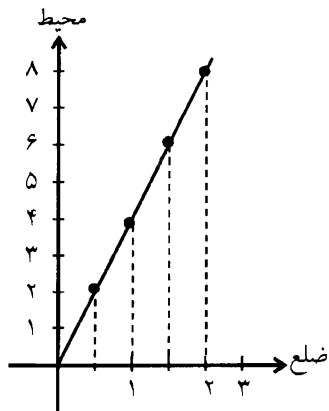
$$x_G = \frac{x_D + x_M}{2} = \frac{\frac{x_A + x_G}{2} + \frac{x_B + x_C}{2}}{2}$$

$$= \frac{x_A + x_G + x_B + x_C}{4} \Rightarrow 4x_G = x_A + x_G + x_B + x_C$$

$$= x_A + x_B + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad \text{به همین ترتیب ثابت می شود:}$$

رابطه های خطی



پدیده های مختلفی در طبیعت با هم ارتباط دارند. مسافتی که یک خودرو طی می کند با بنزینی که مصرف می کند رابطه ی مستقیم دارد. توان جسمی افراد با تغذیه ی آن ها رابطه دارد. محیط یک مربع با ضلع آن رابطه ی مستقیم دارد. جدول زیر را که رابطه ی بین ضلع و محیط یک مربع را نشان می دهد در نظر بگیرید و نمودار هندسی آن را رسم کنید.

ضلع مربع	۰/۵	۱	۱/۵	۲	...	x
محیط مربع	۲	۴	۶	۸	...	$4x$

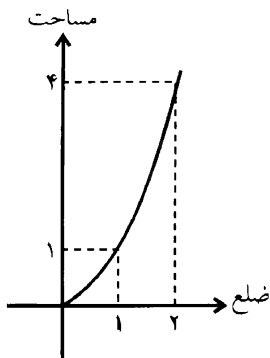
اگر نقاط $\begin{bmatrix} 0/5 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1/5 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ را به هم وصل کنیم ملاحظه می کنیم روی یک خط راست قرار می گیرند.

نسبت محیط یک مربع به ضلع آن عدد ثابت ۴ می باشد. اگر x ضلع مربع و y محیط آن باشد،

$$\frac{y}{x} = 4 \quad \text{یا} \quad y = 4x.$$

یعنی رابطه ی بین محیط یک مربع و ضلع آن یک رابطه ی درجه ی اول بر حسب x و y و نمودار هندسی آن یک خط راست است. چنین رابطه ای را یک **رابطه ی خطی** می نامیم.

اگر ضلع مربع را x و مساحت آن را y فرض می کنیم رابطه ی آن ها به صورت $y = x^2$ می باشد که یک رابطه ی خطی نیست. نمودار هندسی رابطه ی $y = x^2$ به صورت یک منحنی می باشد.



☆ شیب یک خط

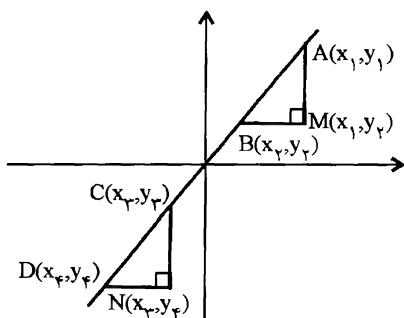
دو نقطه‌ی A و B را روی یک خط در نظر بگیرید. اگر از نقطه‌ی A روی خط تا نقطه‌ی B حرکت کنیم نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب خط می‌نامیم.

$$\text{شیب} = \frac{HB}{AH}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه:

$$\overline{AH} = x_B - x_A \quad \text{و} \quad \overline{HB} = y_B - y_A$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



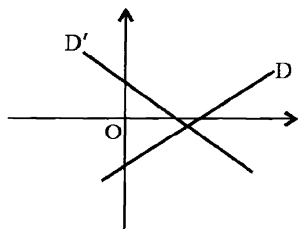
به‌طور کلی شیب یک خط عبارت است از نسبت تغییرات عرض‌های دو نقطه‌ی دلخواه آن به تغییرات طول‌های متناظر آن‌ها. این نسبت همواره مقدار ثابتی است. زیرا:

$$\triangle AMB \sim \triangle CND \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DN}}$$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{DN}}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = m$$

🔍 **نکته:** خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آن‌ها عرض نیز اضافه شود شیبشان مثبت است و خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آن‌ها عرض نقاط کاهش می‌یابد دارای شیب منفی می‌باشند. در شکل مقابل شیب خط D مثبت و شیب خط D' منفی است.

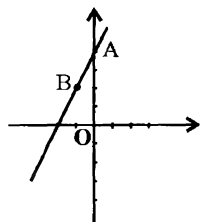


☆ معادله‌ی خط

اگر مقادیر دو متغیر رابط‌ه‌ی خطی داشته باشند و آن‌ها را x و y فرض کنیم نمودار هندسی رابط‌ه یک خط راست است. معادله‌ای که رابط‌ه‌ی بین x و y را بیان می‌کند معادله‌ی خط نامیده می‌شود. به عبارت دیگر معادله‌ی خط رابط‌ه‌ای است بین طول و عرض نقاط تشکیل‌دهنده‌ی خط. صورت استاندارد معادله‌ی خط به صورت $y = mx + d$ می‌باشد.

مثال ۱۲: نمودار هندسی خطی به معادله‌ی $y = 2x + 4$ را رسم کنید.

حل: 



برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از خط را پیدا کرده و آن‌ها را به هم وصل کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \times 0 + 4 = 4 \quad A(0, 4)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2 \times (-1) + 4 = 2 \quad B(-1, 2)$$

خط در نقطه‌ی $A(0, 4)$ محور عرض را قطع کرده است. عدد ۴ را عرض از مبدأ خط می‌نامند. اگر بخواهیم نقطه‌ی برخورد خط را با محور طول حساب کنیم، کافی است به جای y در معادله‌ی خط صفر قرار دهیم.

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 4 \Rightarrow -4 = 2x \rightarrow x = -2$$

خط در نقطه‌ی $(-2, 0)$ محور طول را قطع کرده که عدد ۲- را طول از مبدأ خط می‌نامند. به طور کلی عرض نقطه‌ی برخورد یک خط با محور عرض را عرض از مبدأ خط و طول نقطه‌ی برخورد یک خط با محور طول را طول از مبدأ خط می‌نامند.

مثال ۱۳: طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $y = 3x - 6$ را پیدا کنید.

حل: 

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \times 0 - 6 = -6 \quad \text{عرض از مبدأ}$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 3x - 6 \Rightarrow 6 = 3x \rightarrow x = 2 \quad \text{طول از مبدأ}$$

مثال ۱۴: نشان دهید شیب خطی به معادله‌ی $y = mx + d$ برابر m است.

حل: فرض می‌کنیم $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط باشند.

$$\begin{aligned} \text{شیب خط} &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(mx_1 + d) - (mx_2 + d)}{x_1 - x_2} = \frac{mx_1 + d - mx_2 - d}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{m(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m \end{aligned}$$

مثال ۱۵: معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۷ بوده و محور عرض را در نقطه‌ی $A(0, 4)$ قطع کند.

حل: عرض از مبدأ خط ۴ است. بنابراین معادله‌ی خط به صورت $y = 7x + 4$ می‌باشد.

مثال ۱۶: معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۳ و طول از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

حل: 

فرض می‌کنیم معادله‌ی خط به صورت $y = mx + d$ باشد. با توجه به این که شیب خط برابر ۳ است، پس معادله‌ی خط به صورت $y = 3x + d$ در می‌آید. با توجه به این که طول از مبدأ خط برابر ۲ می‌باشد، پس خط از نقطه‌ی $(2, 0)$ می‌گذرد.

$$0 = 3 \times 2 + d \Rightarrow 0 = 6 + d \Rightarrow d = -6$$

$$y = 3x - 6$$

معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد و شیب آن برابر m است

فرض می‌کنیم معادله‌ی خط به صورت $y = mx + d$ باشد. با توجه به این که این خط باید از نقطه‌ی A بگذرد، مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$y_1 = mx_1 + d \Rightarrow d = y_1 - mx_1$$

$$y = mx + y_1 - mx_1 \Rightarrow \boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

مثال ۱۷: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(2, -3)$ بگذرد و شیب آن ۵ باشد.

حل: 

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = 5(x - 2) \rightarrow y + 3 = 5x - 10 \rightarrow y = 5x - 13$$

مثال ۱۸: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طول را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع کند و شیب

آن $\frac{2}{3}$ باشد.

حل: در واقع خط از نقطه‌ی $(-۳, ۰)$ می‌گذرد.

$$y - ۰ = \frac{۲}{۳}(x + ۳) \rightarrow y = \frac{۲}{۳}x + ۲$$

مثال ۱۹: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۴, -۱)$ بگذرد و موازی محور طول باشد.حل: 

شیب خطی که موازی محور طول است صفر می‌باشد.

$$y + ۱ = ۰(x - ۴) \rightarrow y + ۱ = ۰ \rightarrow y = -۱$$

مثال ۲۰: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۴, -۱)$ بگذرد و موازی محور عرض باشد.حل: 

خطی که موازی محور عرض است معادله‌اش به‌صورت $x = h$ است که h طول مشترک کلیه‌ی نقاط تشکیل‌دهنده‌ی خط می‌باشد. بنابراین معادله‌ی خطی که از A موازی محور عرض رسم می‌شود $x = ۴$ است.

معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد

برای نوشتن معادله‌ی خط سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$x_1 = x_2 \quad (۱)$$

در این حالت خط موازی محور y ها و معادله‌ی آن به‌صورت $x = x_1$ است.

$$y_1 = y_2 \quad (۲)$$

در این حالت خط موازی محور x ها و معادله‌ی آن به‌صورت $y = y_1$ است.

$$y_1 \neq y_2 \text{ و } x_1 \neq x_2 \quad (۳)$$

در این حالت شیب خط برابر $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ می‌باشد و معادله‌ی خط به‌صورت زیر است.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

این معادله را به‌صورت زیر نیز می‌نویسند.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

مثال ۲۱: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(2, 5)$ و $B(2, -3)$ بگذرد.

✎ حل: $x = 2$

مثال ۲۲: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(1, -4)$ و $B(-1, -4)$ بگذرد.

✎ حل: $y = -4$

مثال ۲۳: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(3, 5)$ و $B(2, -1)$ بگذرد.

✎ حل:

$$m_{AB} = \frac{5 - (-1)}{3 - 2} = 6$$

$$AB : y - 5 = 6(x - 3) \rightarrow y = 6x - 13$$

مثال ۲۴: معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۶ و عرض از مبدأ آن ۳- باشد.

✎ حل:

فرض می‌کنیم معادله‌ی خط به صورت $y = mx - 3$ باشد. طول از مبدأ خط ۶ است. پس خط از نقطه‌ی $(6, 0)$ می‌گذرد.

$$0 = 6m - 3 \rightarrow 3 = 6m \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

مثال ۲۵: نشان دهید معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(P, 0)$ و $B(0, q)$ می‌گذرد

$$\text{به صورت } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \text{ می‌باشد.}$$

✎ حل:

$$m_{AB} = \frac{0 - q}{p - 0} = -\frac{q}{p}$$

$$y - 0 = -\frac{q}{p}(x - p) \rightarrow y = -\frac{q}{p}x + q$$

$$\rightarrow y + \frac{q}{p}x = q \Rightarrow \boxed{\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1}$$

مثال ۲۶: معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۲ و عرض از مبدأ آن ۴- باشد.

حل: 

در واقع خط از دو نقطه‌ی $(2, 0)$ و $(0, -4)$ می‌گذرد.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1 \rightarrow 2x - y = 4$$

مثال ۲۷: مساحت مثلثی را حساب کنید که خط $3x + 4y = 12$ با محورهای مختصات

می‌سازد.

حل: 

مساحت مثلث در واقع نصف قدرمطلق حاصل ضرب

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط می‌باشد.

$$x = 0 \rightarrow 3 \times 0 + 4y = 12 \rightarrow y = 3 \quad (0, 3)$$

$$y = 0 \rightarrow 3x + 4 \times 0 = 12 \rightarrow x = 4 \quad (4, 0)$$

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

مثال ۲۸: شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $5x - 2y = 10$ را به‌دست آورید.

حل: 

$$x = 0 \Rightarrow -2y = 10 \rightarrow y = -5 \quad \text{عرض از مبدأ}$$

$$y = 0 \Rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2 \quad \text{طول از مبدأ}$$

$$5x - 2y = 10 \Rightarrow -2y = -5x + 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 5$$

شیب خط برابر $\frac{5}{2}$ است.

مثال ۲۹: مطلوبست معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(-2, 3)$ بگذرد و عرض از مبدأ آن سه

برابر طول از مبدأ باشد.

حل: 

$$\begin{cases} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \\ q = 3p \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{p} + \frac{3}{3p} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{p} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow \frac{-1}{p} = 1 \Rightarrow p = -1 \text{ و } q = -3$$

بنابراین معادله‌ی خط عبارت است از:

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow 3x + y = -3$$

خط $y = -\frac{3}{2}x$ نیز از نقطه‌ی A می‌گذرد و عرض از مبدأ آن سه برابر طول از مبدأ آن است.**مثال ۳۰:** معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(6, -2)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.حل: 

$$\begin{cases} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \\ p + q = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{5-p} = 1 \Rightarrow \frac{6}{p} + \frac{-2}{5-p} = 1 \Rightarrow \frac{30 - 6p - 2p}{p(5-p)} = 1$$

$$\Rightarrow 30 - 8p = 5p - p^2 \Rightarrow p^2 - 13p + 30 = 0 \Rightarrow (p-3)(p-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-3=0 \rightarrow p=3 \rightarrow q=2 \\ p-10=0 \rightarrow p=10 \rightarrow q=-5 \end{cases}$$

دو خط با مشخصات خواسته شده وجود دارد.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \rightarrow 2x + 3y = 6$$


$$\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1 \rightarrow x - 2y = 10$$

مثال ۳۱: نشان دهید خط $\frac{2}{3}x - 3y = 8$ از نقطه‌ی $A(3, -2)$ می‌گذرد.حل: کافی است نشان دهیم مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$\frac{2}{3} \times 3 - 3 \times (-2) = 8 \Rightarrow 2 + 6 = 8 \Rightarrow 8 = 8$$

مثال ۳۲ : مقدار a را چنان تعیین کنید که خط زیر از نقطه‌ی $A(-1, -2)$ بگذرد.

$$(a-2)x - 3y = 2a - 4$$


حل: 

$$(a-2)(-1) - 3 \times (-2) = 2a - 4 \Rightarrow -a + 2 + 6 = 2a - 4$$

$$\Rightarrow -a + 8 = 2a - 4 \Rightarrow 12 = 3a \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

مثال ۳۳ : خط $3x - 5y + 17 = 0$ از نقطه‌ی $A(2t - 3, t + 4)$ می‌گذرد. مقدار t


چه قدر است؟

حل: 

$$3(2t - 3) - 5(t + 4) + 17 = 0$$

$$6t - 9 - 5t - 20 + 17 = 0 \Rightarrow t - 12 = 0 \Rightarrow t = 12$$

مثال ۳۴ : نقطه‌ی $A(2t - 5, t + 3)$ روی خط $x = 7$ قرار دارد. مقدار t چه قدر است؟


حل: 

تمام نقاط واقع بر خط $x = 7$ طولشان ۷ می‌باشد.

$$2t - 5 = 7 \Rightarrow 2t = 12 \Rightarrow t = 6$$

مثال ۳۵ : دو نقطه‌ی $A(4t - 3, 2t - 1)$ و $B(5, 9)$ بر خطی موازی محور طول قرار

دارند. مقدار t چه قدر است؟


حل: 

کلیه‌ی نقاطی که بر خط موازی محور طول قرار داشته باشند، عرضشان مساوی است.

$$2t - 1 = 9 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

مثال ۳۶ : نشان دهید سه نقطه‌ی $A(5, 7)$ و $B(4, 3)$ و $C(6, 11)$ روی یک خط راست

قرار دارند.

حل: 

معادله‌ی خطی که از نقاط A و B می‌گذرد را نوشته و مختصات C را در آن معادله قرار می‌دهیم.

$$m_{AB} = \frac{7-3}{5-4} = 4$$

$$AB : y - 3 = 4(x - 4) \Rightarrow y - 3 = 4x - 16 \rightarrow y = 4x - 13$$

$$11 = 4 \times 6 - 13 \Rightarrow 11 = 11$$

مختصات نقطه‌ی C در معادله‌ی خط AB صدق می‌کند. پس نقطه‌ی C روی خط AB قرار می‌گیرد. یعنی سه نقطه روی یک خط راست می‌باشند.

مثال ۳۷: سه نقطه‌ی $A(4, 9)$ و $B(3, 5)$ و $C(n+1, 3n)$ روی یک خط راست قرار دارند. مقدار n چه قدر است؟

حل: 

$$AB : y - 9 = \frac{9-5}{4-3}(x-4) \Rightarrow y - 9 = 4(x-4) \rightarrow y - 9 = 4x - 16$$

$$AB : y = 4x - 7 \Rightarrow 3n = 4(n+1) - 7 \Rightarrow 3n = 4n + 4 - 7 \rightarrow n = 3$$

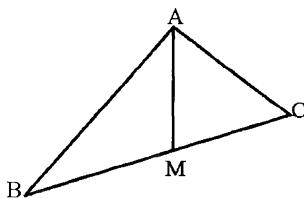
مثال ۳۸: سه نقطه‌ی $A(2, 5)$ و $B(m-4, m+6)$ و $C(2, -9)$ روی یک خط راست قرار دارند. مقدار m چه قدر است؟

حل: 

با توجه به این که طول دو نقطه‌ی A و C برابر ۲ می‌باشد معادله‌ی خطی که از A و C می‌گذرد، به صورت $x = 2$ می‌باشد. پس طول نقطه‌ی B نیز باید ۲ باشد. $m - 4 = 2 \rightarrow m = 6$

مثال ۳۹: اگر $A(-2, 3)$ و $B(3, 4)$ و $C(-7, -2)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی ضلع AC و میانه‌ی AM را بنویسید.

حل: 



$$m_{AC} = \frac{3+2}{-2+7} = \frac{5}{5} = 1$$

$$AC : y - 3 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 5$$

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + (-7)}{2} = -2$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \quad M(-2, 1)$$

با توجه به این که طول دو نقطه‌ی A و M برابر ۲ می‌باشد، می‌توان گفت میانه‌ی AM موازی محور عرض است و معادله‌ی آن به صورت $x = -2$ است.

مثال ۴۰: اگر $A(3, 5)$ و $B(6, -2)$ و $C(13, 1)$ سه رأس یک مثلث باشند، نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است و میانه‌ی نظیر وتر مثلث نصف وتر است.

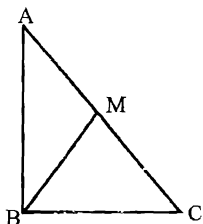
حل: 

$$AB = \sqrt{(3-6)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

$$AC = \sqrt{(3-13)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116}$$

$$BC = \sqrt{(6-13)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

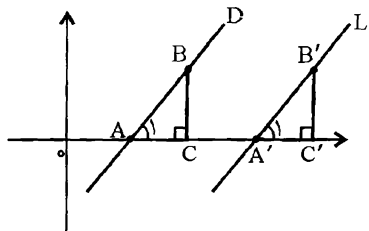
$$AB^2 + BC^2 = 58 + 58 = 116 = AC^2 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$



$$M = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad BM = \sqrt{(6-8)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$AC = \sqrt{116} = \sqrt{4 \times 29} = 2\sqrt{29}$$

$$BM = \frac{AC}{2}$$



☆ شرط توازی دو خط

در شکل مقابل دو خط D و L موازیند. دو نقطه‌ی A و B را روی خط D و دو نقطه‌ی A' و B' را روی خط L در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم شیب دو خط مساوی است.

$$\left. \begin{array}{l} D \parallel L \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \\ \hat{C} = \hat{C}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

$$\Rightarrow m_D = m_L$$

حال فرض می‌کنیم شیب دو خط D و L برابرند و نشان می‌دهیم دو خط موازیند.

$$\left. \begin{array}{l} m_D = m_L \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{C} = \hat{C}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \Rightarrow D \parallel L$$

بنابراین می‌توان گفت اگر دو خط موازی باشند، شیب‌هایشان مساوی است و برعکس.

🔗 نکته: اگر شیب و عرض از مبدأ دو خط مساوی باشند دو خط بر هم منطبقند.

مثال ۴۱: دو خط $y = 4x + 3$ و $y = x - 2$ با هم موازیند. مقدار t چه قدر است؟

✎ حل:

$$2y - tx = x - 2 \Rightarrow 2y = (t+1)x - 2 \Rightarrow y = \left(\frac{t+1}{2}\right)x - 1$$

$$\frac{t+1}{2} = 4 \Rightarrow t+1 = 8 \rightarrow t = 7$$

مثال ۴۲: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(3, -2)$ بگذرد و با

خط $4x - 2y - 1 = 0$ موازی باشد.

✎ حل:

$$4x - 2y - 1 = 0 \rightarrow -2y = -4x + 1 \rightarrow y = 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

$$y + 2 = 2(x - 3) \rightarrow y + 2 = 2x - 6 \rightarrow y = 2x - 8$$

مثال ۴۳: معین کنید دو خط زیر به ازای چه مقداری از n موازی و به ازای چه مقداری از n

منطبق می‌شوند:

$$y = (n-1)^2x - 3$$

$$y = 4x + n - 2$$

✎ حل:

$$(n-1)^2 = 4$$

$$n-1 = 2 \rightarrow n = 3$$

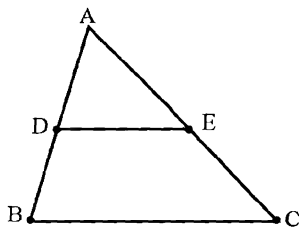
$$n-1 = -2 \Rightarrow n = -1$$

به ازای $n = 3$ عرض از مبدأ دو خط مختلف می‌باشند. پس دو خط موازیند. اما به ازای $n = -1$ عرض از مبدأ هر دو خط -3 می‌شود که در این صورت دو خط بر هم منطبق می‌شوند.

مثال ۴۴: اگر $A(-4, 1)$ و $B(0, 5)$ و $C(4, -3)$ سه رأس یک مثلث و D و E

وسط‌های اضلاع AB و AC باشند، نشان دهید DE با ضلع BC موازی و

مساوی نصف آن است.

حل: 

$$x_D = \frac{-4+0}{2} = -2$$

$$y_D = \frac{1+5}{2} = 3 \quad D(-2, 3)$$

$$x_E = \frac{-4+4}{2} = 0$$

$$y_E = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad E(0, -1)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{DE} &= \frac{3+1}{-2-0} = \frac{4}{-2} = -2 \\ m_{BC} &= \frac{5+3}{0-4} = \frac{8}{-4} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{DE} = m_{BC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\left. \begin{aligned} DE &= \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ BC &= \sqrt{(0-4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow DE = \frac{BC}{2}$$

مثال ۴۵: اگر $D: Ax + By + C = 0$ و $D': A'x + B'y + C' = 0$ باشد، ثابت

کنید دو خط در صورتی موازیند که $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ و دو خط منطبقند در

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \text{ صورتی که}$$

حل: 

شیب خط D برابر $-\frac{A}{B}$ و شیب خط D' برابر $-\frac{A'}{B'}$ می‌باشند. هم‌چنین عرض از مبدأ خط

D برابر $-\frac{C}{B}$ و عرض از مبدأ خط D' برابر $-\frac{C'}{B'}$ است.

$$\frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \text{شرط تساوی شیب‌ها}$$

$$\frac{-C}{B} = \frac{-C'}{B'} \Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} \Rightarrow \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'} \quad \text{شرط تساوی عرض از مبدأها}$$

بنابراین اگر $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ باشد در واقع هم شیب‌های دو خط برابرند و هم عرض از

مبدأهای آن‌ها که در این صورت دو خط منطبق می‌شوند و اگر $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ باشد، شیب‌های دو خط مساوی و عرض از مبدأهای آن‌ها متفاوت می‌شود و دو خط موازی می‌باشند.

مثال ۴۶: دو خط $D: 3x + 2y + 1 = 0$ و $D': 6x + 4y + 3 = 0$ با هم موازیند. زیرا:

حل: 

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{1}{3}$$

مثال ۴۷: دو خط $D: x - 2y + 3 = 0$ و $D': 3x - 6y + 9 = 0$ برهم منطبق‌اند،

زیرا:

$$\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9}$$

مثال ۴۸: مقدار n را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند.

$$D: (n-1)x + ny - 1 = 0$$

$$D': 4nx + (n-1)y + 2 = 0$$

حل: 

$$\frac{n-1}{4n} = \frac{n}{n-1} \neq \frac{-1}{2}$$

$$(n-1)^2 = 4n^2 \Rightarrow (n-1)^2 - 4n^2 = 0 \Rightarrow (n-1-2n)(n-1+2n) = 0$$

$$\Rightarrow (-n-1)(3n-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -n-1=0 \rightarrow \boxed{n=-1} \\ 3n-1=0 \rightarrow \boxed{n=\frac{1}{3}} \end{cases}$$

به ازای $n = \frac{1}{3}$ سه نسبت فوق مساوی شده و دو خط بر هم منطبق می‌شوند. لذا به

ازای $n = -1$ دو خط D و D' موازی می‌شوند.

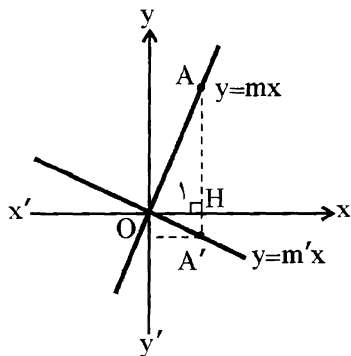
نکته: اگر عرض از مبدأ چند خط با هم برابر باشند، آن خطوط یک‌دیگر را در نقطه‌ای واقع بر محور عرض قطع می‌کنند.

نکته: خطوطی که عرض از مبدأ آن‌ها تعریف نشده است موازی محور عرض می‌باشند. لذا خودشان با هم موازیند.

نکته: اگر طول از مبدأ چند خط برابر باشند آن خطوط یک‌دیگر را در نقطه‌ای واقع بر محور طول قطع می‌کنند.

☆ شرط تعامد دو خط

دو خط $D: y = mx + d$ و $D': y = m'x + d'$ را در نظر بگیرید. شرط عمود بودن دو خط D و D' آن است که دو خط $y = mx$ و $y = m'x$ بر هم عمود باشند. اکنون دو خط $y = mx$ و $y = m'x$ را در شکل زیر در نظر گرفته و از نقطه‌ی H به طول ۱ واقع بر محور Ox خطی عمود بر این محور رسم می‌کنیم تا دو خط فوق را در نقاط A و A' قطع کند. مختصات نقاط A و A' عبارتند از $A(1, m)$ و $A'(1, m')$ برای این‌که دو خط OA و OA' بر هم عمود باشند یعنی مثلث OAA' قائم‌الزاویه باشد، لازم است که داشته باشیم $OA^2 + OA'^2 = AA'^2$.



$$1 + m^2 + 1 + m'^2 = (m - m')^2$$

$$1 + m^2 + 1 + m'^2 = m^2 - 2mm' + m'^2$$

$$\Rightarrow 2 - 2mm' \Rightarrow \boxed{mm' = -1}$$

بنابراین برای آن‌که دو خط راست بر هم عمود باشند باید حاصل ضرب شیب‌هایشان -۱ باشد.

مثال ۴۹: معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۲ بوده و بر خط $2x - 3y = 1$ عمود شود.

حل:

در واقع خط از نقطه‌ی $(2, 0)$ می‌گذرد.

$$2x - 3y = 1 \rightarrow -3y = -2x + 1 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$m \times \frac{2}{3} = -1 \rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \rightarrow 3x + 2y = 6$$

مثال ۵۰: دو خط زیر بر هم عمودند. مقدار n چه قدر است؟

$$3x - 2y = nx - 4y + 5$$

$$y = 2x - 7$$

حل: 

$$3x - 2y = nx - 4y + 5 \Rightarrow 4y - 2y = nx - 3x + 5$$

$$2y = (n - 3)x + 5 \Rightarrow y = \left(\frac{n - 3}{2} \right)x + \frac{5}{2}$$

$$\frac{n - 3}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow n - 3 = -1 \Rightarrow n = 2$$

مثال ۵۱: نشان دهید دو خط $D: Ax + By + C = 0$ و $D': A'x + B'y + C' = 0$

در صورتی بر هم عمودند که $A \times A' + B \times B' = 0$.

حل: 

$$m_D = -\frac{A}{B} \text{ و } m_{D'} = -\frac{A'}{B'}$$

$$\left(-\frac{A}{B} \right) \left(-\frac{A'}{B'} \right) = -1 \Rightarrow \frac{A \times A'}{B \times B'} = -1$$

$$\Rightarrow A \times A' = -B \times B' \Rightarrow \boxed{A \times A' + B \times B' = 0}$$

مثال ۵۲: دو خط زیر بر هم عمودند. مقدار n چه قدر است؟

$$(n - 1)x - 3y + 4 = 0$$

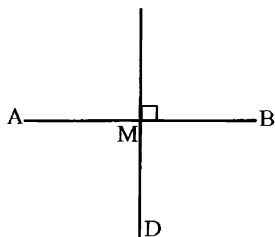
$$2x + (n + 1)y - 1 = 0$$

حل: 

$$2(n - 1) - 3(n + 1) = 0 \Rightarrow 2n - 2 - 3n - 3 = 0 \Rightarrow -n = 5 \Rightarrow n = -5$$

مثال ۵۳: اگر $A(3, 2)$ و $B(-5, 4)$ دو سر یک پاره خط باشند معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

حل: 



$$x_M = \frac{-5 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow M(-1, 3)$$

$$y_M = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$m_{AB} = \frac{2 - 4}{3 - (-5)} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} \rightarrow m_D = 4$$

$$D: y - 3 = 4(x + 1) \rightarrow y = 4x + 4 + 3 \rightarrow y = 4x + 7$$

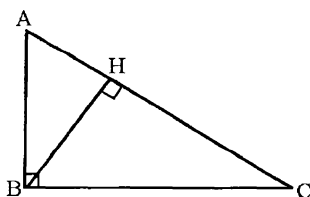
مثال ۵۴: اگر $A(-۳, -۲)$ و $B(۱, ۵)$ و $C(-۶, ۹)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع نظیر وتر مثلث را بنویسید.

حل: 

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-۲-۵}{-۳-۱} = \frac{-۷}{-۴} = \frac{۷}{۴} \\ m_{BC} &= \frac{۵-۹}{۱+۶} = \frac{-۴}{۷} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp BC \rightarrow \hat{B} = ۹۰$$



$$m_{AC} = \frac{-۲-۹}{-۳+۶} = \frac{-۱۱}{۳} \rightarrow m_{BH} = \frac{۳}{۱۱}$$

$$BH: y - ۵ = \frac{۳}{۱۱}(x - ۱)$$

$$۱۱y - ۵۵ = ۳x - ۳ \Rightarrow ۳x - ۱۱y + ۵۲ = ۰$$

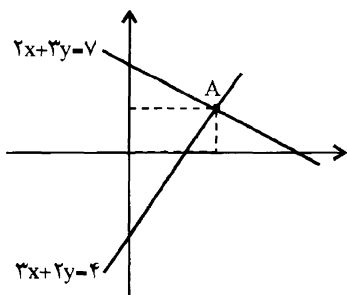
☆ فصل مشترک دو خط راست

دو خط راست در صفحه نسبت به هم سه حالت دارند.

(۱) **دو خط متقاطعند:** در این صورت دو خط یک نقطه‌ی مشترک دارند که مختصات این نقطه در معادله‌ی هر دو خط صدق می‌کند. لذا این نقطه جواب دستگاه دو معادله و دوجهولی می‌باشد که از معادلات آن دو خط تشکیل شده است.

مثال ۵۵: مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $۳x - ۲y = ۴$ و $۲x + ۳y = ۷$ را به دست آورید.

حل: 



$$\begin{cases} ۳x - ۲y = ۴ \\ ۲x + ۳y = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x - ۶y = ۱۲ \\ ۴x + ۶y = ۱۴ \end{cases}$$

$$۱۳x = ۲۶ \rightarrow x = ۲$$

$$۳ \times ۲ - ۲y = ۴ \rightarrow -۲y = -۲ \rightarrow y = ۱$$

بنابراین نقطه‌ی تلاقی دو خط نقطه‌ی $A(۲, ۱)$ می‌باشد.

۲) دو خط با هم موازیند: در این صورت دو خط هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

مثال ۵۶: مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $x - 2y = 1$ و $2x - 4y = 3$ را به دست آورید.

 حل:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$0 = 1$$

تساوی اخیر نادرست است. به عبارت دیگر دستگاه فوق غیرممکن است و جواب ندارد. در واقع می‌توان گفت با توجه به این که دو خط $x - 2y = 1$ و $2x - 4y = 3$ موازیند، نقطه‌ی برخورد ندارند.

۳) دو خط منطبقند: در این صورت دو خط بیشمار نقطه‌ی مشترک دارند.

مثال ۵۷: فصل مشترک خطوط $2x - y = 3$ و $4x - 2y = 6$ را به دست آورید.

 حل:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

این تساوی همواره درست است. به عبارت دیگر به ازای تمام مقادیر x و y دستگاه جواب دارد. در واقع می‌توان گفت با توجه به این که دو خط منطبقند بیشمار نقطه‌ی مشترک دارند.

مثال ۵۸: دستگاه زیر جواب ندارد. مقدار n چه قدر است؟

$$\begin{cases} (n+3)x + (n-1)y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

 حل:

با توجه به این که دستگاه جواب ندارد، می‌توان گفت دو خط موازیند.

$$\frac{n+3}{3} = \frac{n-1}{2} \neq \frac{7}{4} \Rightarrow 2n+6 = 3n-3 \Rightarrow n=9$$

به ازای $n=9$ کسر $\frac{n-1}{2}$ برابر ۴ می‌شود که با $\frac{7}{4}$ مساوی نیست.

مثال ۵۹ : مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر بیشمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} 2ax + 3by = x + 2y + 6 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

حل: 

$$\begin{cases} 2ax + 3by - x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a-1)x + (3b-2)y = 6 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

$$\frac{2a-1}{2} = \frac{3b-2}{5} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{2a-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a-1=1 \Rightarrow 2a=2 \rightarrow a=1$$

$$\frac{3b-2}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6b-4=5 \rightarrow 6b=9 \rightarrow b=\frac{3}{2}$$

مثال ۶۰ : تحقیق کنید سه خط زیر از یک نقطه می‌گذرند یا خیر؟

$$D: 3x + 2y = 1 \quad D': 5x - y = 6 \quad D'': 7x - 4y = 11$$

حل: 

نقطه‌ی برخورد دو خط D و D' را به‌دست آورده و مختصات آن‌را در معادله‌ی خط D'' قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 10x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow 13x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{13}$$

$$5 \times \frac{3}{13} - y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{13} \quad A\left(\frac{3}{13}, -\frac{1}{13}\right)$$

$$7x - 4y = 11$$

$$7 \times \frac{3}{13} - 4 \times \left(-\frac{1}{13}\right) = 11 \Rightarrow \frac{21}{13} + \frac{4}{13} = 11 \Rightarrow \frac{25}{13} = 11$$

مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط D'' صدق می‌کند. پس سه خط D , D' و D'' از یک نقطه می‌گذرند.

مثال ۶۱ : مقدار n را چنان تعیین کنید که سه خط زیر از یک نقطه بگذرند.

$$D: 7x - 3y = 11 \quad D': 2nx - (n-1)y = 10 \quad D'': 5x - 6y = 4$$

حل: 

$$\begin{cases} 7x - 3y = 11 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14x + 6y = -22 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow -9x = -18 \Rightarrow x = 2$$

$$5 \times 2 - 6y = 4 \Rightarrow -6y = -6 \Rightarrow y = 1 \quad A(2, 1)$$

$$2n \times 2 - (n-1) \times 1 = 10 \Rightarrow 4n - n + 1 = 10 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$$

☆ فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_0, y_0)$ تا خط L

اگر خط L به معادله‌ی $Ax + By + C = 0$ مفروض

باشد، شیب خط L برابر $-\frac{A}{B}$ و در نتیجه شیب خط

PH برابر با $\frac{B}{A}$ است. معادله‌ی خط PH عبارت است

از:

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \Rightarrow \frac{y - y_0}{B} = \frac{x - x_0}{A}$$

H محل برخورد دو خط L و PH است. یعنی H از حل دستگاه:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y - y_0}{B} = \frac{x - x_0}{A} & (2) \end{cases}$$

به‌دست می‌آید. اگر معادله‌ی دوم را برابر t قرار دهیم، داریم:

$$\frac{y - y_0}{B} = \frac{x - x_0}{A} = t \Rightarrow \begin{cases} x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0 \end{cases}$$

این x و y باید در معادله‌ی (۱) دستگاه نیز صدق کنند تا جواب دستگاه باشند.

$$A(At + x_0) + B(Bt + y_0) + C = 0 \Rightarrow t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط L یعنی PH برابر است با:

$$PH = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{A^2 t^2 + B^2 t^2} = |t| \times \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow PH = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

مثال ۶۲: فاصله‌ی نقطه‌ی $M(2, -3)$ از خط $D: 3x - 4y + 2 = 0$ چه قدر است؟

حل:

$$d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times (-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

نکته: فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $Ax + By + C = 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

مثال ۶۳: ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ از خط $x = h$ برابر است با

$$|x_0 - h|$$

حل:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ از خط $x = h$ که می‌توان آن را به صورت $1x + 0y - h = 0$ نوشت بر اساس فرمول برابر است با:

$$d = \frac{|1 \times x_0 + 0 \times y_0 - h|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|x_0 - h|}{\sqrt{1}} = |x_0 - h|$$

مثال ۶۴: ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ از خط $y = b$ برابر است با

$$|y_0 - b|$$

حل:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ از خط $y = b$ که می‌توان آن را به صورت $0x + 1y - b = 0$ بر طبق فرمول برابر است با:

$$d = \frac{|0 \times x_0 + 1 \times y_0 - b|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|y_0 - b|}{\sqrt{1}} = |y_0 - b|$$

مثال ۶۵: فاصله‌ی نقطه‌ی $M(2, -5)$ را از خطوط $x = -3$ و $y = 4$ به دست آورید.

حل:

$$|2 - (-3)| = |5| = 5$$

فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $x = -3$ برابر است با:

$$|-5 - 4| = |-9| = 9$$

فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $y = 4$ برابر است با:

مثال ۶۶ : اگر $A(-۲, ۳)$ و $B(۴, -۴)$ و $C(-۴, ۲)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.

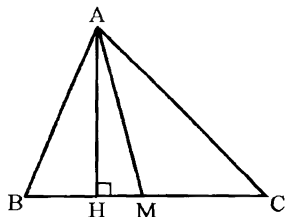
ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع AH را بنویسید.

ثالثاً: فاصله‌ی نقطه‌ی A تا ضلع BC را به دست آورید.

رابعاً: مساحت مثلث را حساب کنید.

حل: 

اولاً:



$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{۴ + (-۴)}{2} = 0 \Rightarrow M(0, -1)$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-۴ + ۲}{2} = -1$$

$$m_{AM} = \frac{۳ - (-1)}{-۲ - 0} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

$$AM : y + 1 = -2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 1$$

$$m_{BC} = \frac{-۴ - ۲}{۴ + ۴} = \frac{-۶}{۸} = \frac{-۳}{۴} \rightarrow m_{AH} = \frac{۴}{۳}$$

ثانیاً:

$$AH : y - ۳ = \frac{۴}{۳}(x + ۲) \rightarrow y - ۳ = \frac{۴}{۳}x + \frac{۸}{۳} \rightarrow y = \frac{۴}{۳}x + \frac{۱۷}{۳}$$

$$AH : ۴x - ۳y + ۱۷ = 0$$

ثالثاً:

$$m_{BC} = \frac{-۳}{۴}$$

$$BC : y + ۴ = -\frac{۳}{۴}(x - ۴) \rightarrow y + ۴ = \frac{-۳}{۴}x + ۳$$

$$y + \frac{۳}{۴}x + ۱ = 0 \rightarrow ۳x + ۴y + ۴ = 0$$

$$AH = \frac{|۳ \times (-۲) + ۴ \times ۳ + ۴|}{\sqrt{۳^2 + ۴^2}} = \frac{|-۶ + ۱۲ + ۴|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|۱۰|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$


$$BC = \sqrt{۴ - (-۴)^2 + (-۴ - ۲)^2} = \sqrt{۶۴ + ۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

رابعاً:

$$S_{\Delta}(ABC) = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{۲ \times ۱۰}{2} = ۱۰$$

مثال ۶۷: مقدار a را چنان تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند:

$$D_1: 3x - y - 1 = 0 \quad D_2: (a - 2)x + 2y - 2a = 0 \quad D_3: 2x + 3y - 8 = 0$$

حل: 

مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط D_1 و D_3 را حساب کرده و آن را در معادله‌ی خط D_2 جایگزین می‌کنیم.


$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$$

$$3 \times 1 - y = 1 \rightarrow y = 2$$

نقطه‌ی برخورد D_1 و D_3 : $(1, 2)$

$$(a - 2) \times 1 + 2 \times 2 - 2a = 0 \rightarrow a - 2 + 4 - 2a = 0 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

مثال ۶۸: به چهار روش نشان دهید سه نقطه‌ی $A(6, 3)$ و $B(3, 1)$ و $C(-3, -3)$ بر یک خط راست قرار دارند.

حل: 

روش اول: نشان می‌دهیم شیب AB و شیب BC برابر است:

$$m_{AB} = \frac{3 - 1}{6 - 3} = \frac{2}{3} \quad m_{BC} = \frac{1 + 3}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_{AB} = m_{BC}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که دو خط AB و BC یا موازیند یا منطبق. اما با توجه به این‌که یک نقطه‌ی مشترک دارند، می‌توان گفت AB و BC برهم منطبقند. لذا نقاط A و B و C بر یک خط راست قرار می‌گیرند.

روش دوم: معادله‌ی خط AB را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی C را در آن جایگزین می‌کنیم.

$$m_{AB} = \frac{3 - 1}{6 - 3} = \frac{2}{3} \quad AB: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 6)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{2}{3}x - 4 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1$$

معادله‌ی خط AB :

$$-3 = \frac{2}{3} \times (-3) - 1 \Rightarrow -3 = -3$$

مختصات نقطه‌ی C در معادله‌ی خط AB صدق می‌کند. بنابراین سه نقطه‌ی A و B و C بر یک استقامتند.

روش سوم: طول پاره‌خط‌های AB و BC و AC را حساب کرده و نشان می‌دهیم طول یکی با مجموع طول‌های دوتای دیگر برابر است.

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3+3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(6+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

ملاحظه می‌شود $AB + BC = AC$. بنابراین A و B و C بر یک خط راست قرار دارند.

روش چهارم: نشان می‌دهیم فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط AB برابر صفر است.

$$AB: y = \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow 2x - 3y - 3 = 0$$

$$d = \frac{|2 \times (-3) - 3 \times (-3) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-6 + 9 - 3|}{\sqrt{4+9}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$$

بنابراین نقطه‌ی C روی خط AB قرار می‌گیرد.

☆ فاصله‌ی دو خط موازی

برای تعیین فاصله‌ی دو خط موازی کافی است نقطه‌ای از یک خط را تا خط دیگر به‌دست آوریم. برای این منظور معادله‌ی دو خط موازی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$D_1: Ax + By + C = 0 \quad \text{و} \quad D_2: Ax + By + C' = 0$$

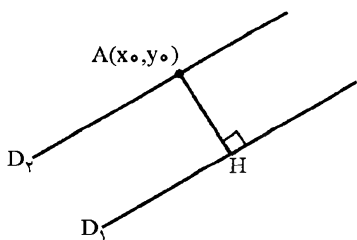
نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ را روی خط D_2 اختیار می‌کنیم. فاصله‌ی این نقطه تا خط D_1 را از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آوریم.

$$AH = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

مختصات نقطه‌ی A باید در معادله‌ی خط D_2 صدق کند.

$$Ax_0 + By_0 + C' = 0 \Rightarrow Ax_0 + By_0 = -C' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AH = \frac{|-C' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



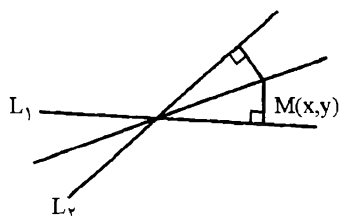
مثال ۶۹: فاصله‌ی دو خط موازی $D_1: 3x + 4y + 1 = 0$ و $D_2: 6x + 8y - 8 = 0$ را به دست آورید.

حل:

$$D_1: 3x + 4y + 1 = 0 \rightarrow 6x + 8y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 - (-8)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{100}} = \frac{10}{10} = 1$$

معادله‌ی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط



دو خط $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ و $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ را در نظر بگیرید. هر نقطه مانند $M(x, y)$ واقع بر نیمساز زاویه‌ی بین دو خط فوق دارای این ویژگی است که از دو خط L_1 و L_2 به یک فاصله می‌باشد.

لذا معادله‌ی نیمساز عبارتست از:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

چنان‌که ملاحظه می‌کنید این معادله شامل دو خط است که معادله‌ی دو نیمساز را می‌دهد.

مثال ۷۰: معادله‌ی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط D, D' را به دست آورید.

$$D: 3x + 4y - 1 = 0$$

$$D': 5x - 12y + 1 = 0$$

حل:

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x - 12y + 1|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{5} = \frac{|5x - 12y + 1|}{13} \Rightarrow \frac{3x + 4y - 1}{5} = \frac{5x - 12y + 1}{13}$$

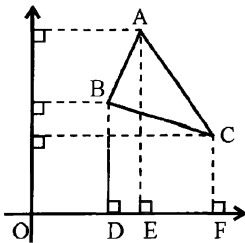
$$39x + 52y - 13 = 25x - 60y + 5 \Rightarrow 14x + 112y - 18 = 0 \Rightarrow 7x + 56y - 9 = 0$$

$$\frac{3x + 4y - 1}{5} = \frac{-5x + 12y - 1}{13} \Rightarrow 39x + 52y - 13 = -25x + 60y - 5$$

$$\Rightarrow 64x - 8y - 8 = 0 \Rightarrow 8x - y - 1 = 0$$

محاسبه‌ی مساحت مثلث به کمک مختصات رئوس آن

فرض کنیم $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ سه رأس مثلث باشند.



$$\begin{aligned}
 S(\triangle ABC) &= |S(ABDE) + S(ACFE) - S(BCFD)| = \left| \frac{1}{2}(BD + AE) \times DE \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(AE + CF) \times EF - \frac{1}{2}(BD + CF) \times DF \right| = \\
 &= \left| \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_1) \right| \\
 &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_2 y_1 + y_1 x_3 + x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 \\
 &\quad - x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_1 y_3| \\
 &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 + x_2 y_3| \\
 &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|
 \end{aligned}$$

مثال ۷۱: اگر $A(4, -2)$ و $B(-6, 2)$ و $C(4, 4)$ سه رأس مثلث باشند، مساحت مثلث را حساب کنید.

حل:

$$S = \frac{1}{2} |4(2 - 4) - 6(4 + 2) + 4(-2 - 2)| = \frac{1}{2} |-8 - 36 - 16| = \frac{1}{2} |-60| = 30$$

تمرین‌های فصل دهم

۱. اگر $A(1, 2)$ و $B(-2, 4)$ و $C(3, 1)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

۲. مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط $A(2-m, 2n+3)$ و $B(-2, 4)$ و $C(n+1, 2m)$ و $D(m+3n, n-5)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد.

۳. نقاط $A(-2, -3)$ و $B(4, 0)$ دو رأس مثلثی هستند که نقطه‌ی $G(3, -2)$ محل تلاقی میانه‌های آن است. مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۴. مقدار t را چنان تعیین کنید که خط $13x - 3ty = t + 1$ از نقطه‌ی $A(-1, -2)$ بگذرد.

۵. مقدار t را چنان تعیین کنید که طول از مبدأ خط زیر برابر ۳ باشد.

$$tx - (3t - 2)y = x + 1$$

۶. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که خط زیر موازی محور طول بوده و محور عرض را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کند.

$$(a - b - 4)x - (b - 2)y + a + 4 = 0$$

۷. معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، هم‌چنین معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم را به‌دست آورید.

۸. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y)$ را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم و نسبت به نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم به‌دست آورید.

۹. معادله‌ی خطی را بنویسید که عرض از مبدأ آن -3 و طول از مبدأ آن 5 باشد.

۱۰. ثابت کنید سه نقطه‌ی $A(2, -3)$ و $B(-2, 5)$ و $C(3, -5)$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

۱۱. مقدار a را چنان تعیین کنید که سه نقطه‌ی $A(2a-1, 3-a)$ و $B(-1, 2)$ و $C(2, -1)$ بر یک خط راست باشند.

۱۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(1, -2)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن ۲- باشد.

۱۳. معادله‌ی خطوطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(2, -1)$ بگذرند و حاصلضرب طول از مبدأ و عرض از مبدأ هریک از آن‌ها برابر یک باشد.

۱۴. اگر $A(1, 1)$ و $B(2, 2)$ و $C(-1, 3)$ سه رأس یک مثلث باشند: اولاً: نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ثانیاً: مساحت مثلث را به دست آورید.

ثالثاً: معادله‌ی میانه‌ی BM را بنویسید.

۱۵. اگر $A(1, -2)$ و $B(5, 4)$ دو سر یک پاره‌خط باشند معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

۱۶. نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم پیدا کنید به قسمی که فاصله‌اش از نقطه‌ی $M(1, 1)$ برابر $\sqrt{20}$ باشد.

۱۷. نقاط $A(2, a)$ و $B(0, 3)$ و $C(-2, -3)$ رئوس مثلث ABC می‌باشند. مقدار a را چنان تعیین کنید که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین باشد. سپس مساحت مثلث را حساب کنید.

۱۸. روی خط $y = x + 4$ نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از دو نقطه‌ی $A(1, 4)$ و $B(3, -4)$ به یک اندازه باشند. (دو روش)

۱۹. نقطه‌ی A را روی محور طول چنان تعیین کنید که از دو نقطه‌ی $B(4, 1)$ و $C(2, 3)$ به یک فاصله باشد. (دو روش)

۲۰. نقاط $A(1, 2)$ و $B(4, 1)$ دو رأس مثلثی هستند که رأس سوم آن روی محور طول و محل تلاقی میانه‌های آن روی نیمساز ربع اول است. مختصات رأس سوم را پیدا کنید.

۲۱. اگر $A(-4, 7)$ و $B(4, 3)$ و $C(0, -5)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع AC و ارتفاع نظیر ضلع AB را بنویسید.

۲۲. اگر $M(1, -1)$ و $N(3, 1)$ و $P(-1, 2)$ وسط‌های اضلاع یک مثلث باشند، مختصات رئوس مثلث را به دست آورید.

۲۳. مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که از سه نقطه‌ی $A(-3, -8)$ و $B(2, 7)$ و $C(4, 3)$ بگذرد.

۲۴. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم عمود باشند.

$$D: 2x - y = 1 \quad D': (a - 1)x + 2y = x - 2$$

۲۵. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند.

$$(2a - 3)x + ay - 2 = 2y + 3a$$

$$(3a - 1)y + 2(3a + 1)x = a - 1$$

۲۶. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط $4y - 3x + 1 = 0$ و $(2a - 1)x + 3(a + 2)y = 1$ بر روی نیمساز ربع اول و سوم متقاطع باشند.

۲۷. معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x + y - 2 = 0$

$$\text{و } 2x - y + 5 = 0 \text{ گذشته و بر خط } \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \text{ عمود باشد.}$$

۲۸. مقدار a را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} (2-a)x + y = 1 \\ ax - 3y = 5 \end{cases}$$

۲۹. اگر فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $4y - 3x + 2a - 1 = 0$ برابر ۳ باشد مقادیر a را حساب کنید.

۳۰. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2, 2)$ را از خط $1 = \frac{2-3x}{4} - \frac{3+2y}{2}$ به دست آورید.

۳۱. معادله‌ی یک قطر مربع $2 = 3x + 4y + 2$ و یک رأس آن $A(2, 3)$ است. مساحت مربع را تعیین کنید.

۳۲. معادله‌ی دو ضلع مجاور یک مستطیل $5 = y - x$ و $7 = x + y$ می‌باشد. اگر مبدأ مختصات یک رأس مستطیل باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۳۳. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2a+1, a-1)$ از خط $4y - 3x + 5 = 0$ برابر ۸ باشد، مقادیر a را تعیین کنید.

۳۴. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2a-3, 5)$ از خط $x = -4$ برابر ۷ باشد، مقادیر a را تعیین کنید.

۳۵. نقطه‌ی $M(5, 3)$ مرکز لوزی $ABCD$ و $x + y = 9$ یکی از اضلاع آن و قطرهای آن موازی محورهای مختصات است. مختصات رأس‌های لوزی را تعیین کنید.

۳۶. به ازای چه مقدار از a دو خط زیر:

اولاً: موازی

ثانیاً: منطبق

ثالثاً: بر هم عمود می‌باشند؟

$$D : 3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$$

$$D' : ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$$

۳۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که سه خط $x - y = 1$ و $x + y = 5$ و $(2m-5)x + my = 5$ در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند؟

۳۸. نقاطی به طول ۳ در صفحه‌ی مختصات پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $A(-3, 6)$ برابر ۱۰ باشد.

۳۹. به ازای چه مقدار از m خطوط به معادلات زیر یک‌دیگر را روی محور عرض قطع می‌کنند؟

$$(2m+1)x + (m-1)y + m - 2 = 0$$

$$mx + (2m+3)y + m + 6 = 0$$

۴۰. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که خط $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ از نقطه‌ی $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ گذشته و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۶ واحد بسازد. ($m, n > 0$).

۴۱. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(1, 2)$ گذشته و فاصله‌ی آن تا مبدأ مختصات برابر ۱ باشد.

۴۲. قطرهای یک لوزی یک‌دیگر را در نقطه‌ی $M(5, 1)$ قطع کرده‌اند. معادله‌ی یکی از قطرهای $y = x - 4$ و معادله‌ی یکی از اضلاع $3y = x + 6$ است. مختصات رئوس لوزی را پیدا کنید.

۴۳. طول ضلع مربعی برابر $4\sqrt{2}$ است. مطلوبست معادله‌ی هر ضلع و هر قطر آن به شرطی که یکی از رأس‌های آن بر مبدأ مختصات قرار داشته باشد و یکی از قطرهای آن بر جهت مثبت محور عرض منطبق شود.

۴۴. معادله‌ی دو ضلع لوزی $ABCD$ و قطر AC به صورت زیر است.
 $AD : x + 2y = 10$ و $BC : x + 2y = 4$ و $AC : y = x + 2$
 مختصات رئوس لوزی را تعیین کنید.

۴۵. نقاط $B(0, 1)$ و $C(-1, 0)$ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین به رأس A می‌باشند. در صورتی که طول ساق مثلث $\sqrt{5}$ باشد، مختصات A را به دست آورید.

۴۶. دو خط $3x - 4y - 1 = 0$ و $8y - 6x + 17 = 0$ بر یک دایره مماسند. مساحت دایره را حساب کنید.

۴۷. نشان دهید سه خط زیر از یک نقطه می‌گذرند.

$$2x + 3y = 9 \quad 7x - 2y = 19 \quad 5x - 4y = 11$$

۴۸. مقدار m را طوری تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند.

$$y = mx + m - 2 \quad y = 2mx + 1 - m \quad y = 3mx + 2 - m$$

۴۹. معادله‌ی دو ضلع مستطیلی عبارتند از $3x + 2y - 7 = 0$ و $2x - 3y + 5 = 0$. اگر $A(2, -3)$ یکی از رأس‌های آن باشد، معادله‌ی دو ضلع دیگر مستطیل را پیدا کنید.

۵۰. $x - 2y = 0$ و $x - 2y + 15 = 0$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل و $7x + y - 15 = 0$ معادله‌ی یکی از قطرهای آن است. مختصات رئوس مستطیل را پیدا کنید.

۵۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که دو خط $(m + 5)x + (m - 1)y = 5$ و $3x - 2y + 10 = 0$:

اولاً: موازی

ثانیاً: منطبق

ثالثاً: بر هم عمود باشند.

۵۲. مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $(x + 2y - 8) + m(x + y - 2) = 0$ با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۲ بسازد.

۵۳. m و n را طوری تعیین کنید که خط:

$$(m + 2n - 3)x + (m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$$

با محور x ها موازی بوده و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند.

۵۴. فاصله‌ی دو خط $5 = 0$ و $6x - 8y + 5 = 0$ و $3x - 4y - 10 = 0$ را تعیین کنید.

۵۵. مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 3)$ را نسبت به خط $x + y = 3$ تعیین کنید.

۵۶. اگر $A(2, -1)$ و $B(-1, 3)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، مختصات رأس‌های C و D را تعیین کنید.

۵۷. معادلات دو ارتفاع مثلث ABC به صورت $3y + 2x + 2 = 0$ و $4y = x - 4$ می‌باشند. اگر $B(0, -4)$ یک رأس آن باشد، مختصات دو رأس دیگر مثلث را به دست آورید.

۵۸. قرینه‌ی خط $2x + y = 3$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم چیست؟

۵۹. معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ای به طول ۲ متعلق به خط $3x + 2y = 0$ بر همین خط عمود شود.

۶۰. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که دو خط $(2a - 3)x - y = 2$ و $x - 3y = 2$ روی محور طول یک‌دیگر را قطع کنند.

۶۱. مقدار a را طوری تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند.

$$D_1: (a - 1)x + ay + 1 = 0 \quad D_2: y = (3a + 1)x \quad D_3: ax + (1 - a)y - 1 = 0$$

۶۲. اگر $A(-1, 4)$ و $B(3, 1)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند:

اولاً: معادله‌ی قطرهای مربع را بنویسید.

ثانیاً: مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.

۶۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC در رأس A قائمه است. $A(3, 1)$ و $B(0, 3)$ می‌باشند. مختصات رأس C را به دست آورید.

۶۴. در یک لوزی، طول یکی از اضلاع $\sqrt{5}$ و نقاط $A(-1, 3)$ و $C(-2, 4)$ دو سر یک قطر آن هستند. مختصات دو رأس دیگر آن را پیدا کنید.

۶۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P(-2, 3)$ گذشته و از دو نقطه‌ی $A(5, -1)$ و $B(3, 7)$ به یک فاصله باشد.

۶۶. در مثلث ABC نقاط M و N به ترتیب اواسط اضلاع AC و AB می‌باشند. معادلات BM و CN به ترتیب عبارتند از $2x - 4y = 29$ و $5x + 5y + 6 = 0$. اگر $A(3, 2)$ باشد، مختصات رئوس B و C را بیابید.

۶۷. معادلات ضلع BC ، ارتفاع CH و ارتفاع BK در مثلث ABC به ترتیب به صورت $4 = x + 3y$ و $y = x - 4$ و $2x - 1 = y$ می‌باشند. اولاً: معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید. ثانیاً: مساحت مثلث را حساب کنید.

۶۸. دو نقطه روی خط $5x - 12y + 15 = 0$ بیابید که فاصله‌ی آن‌ها از خط $27 = 3x + 4y$ برابر ۴ واحد باشد.

۶۹. نقاط $A(3, 1)$ و $B(1, -3)$ دو رأس از مثلث ABC می‌باشند که مساحت آن ۳ واحد سطح و رأس C روی محور عرض است. مختصات نقطه‌ی C را تعیین کنید.

۷۰. نقاط $A(3, -1)$ و $B(5, 5)$ دو رأس از مثلث ABC و $H(6, 2)$ نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های آن است. مختصات رأس سوم مثلث را بیابید.

۷۱. خط راستی از مبدأ مختصات گذشته و طول پاره‌خطی از آن که بین دو خط $2x - y + 10 = 0$ و $2x - y + 5 = 0$ واقع شده است برابر $\sqrt{10}$ است. معادله‌ی این خط را بنویسید.

۷۲. معادله‌ی ارتفاع BH و میانه‌ی CM از مثلث ABC به ترتیب $3x + y + 11 = 0$ و $x + 2y + 7 = 0$ می‌باشند. اگر $A(2, -7)$ یک رأس آن باشد، معادله‌ی اضلاع مثلث را بنویسید.

۷۳. معادله‌ی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی $20 = 3x - 7y$ و $C(7, -4)$ یکی از رأس‌های مثلث است. معادله‌ی دو ضلع دیگر مثلث را بنویسید.

۷۴. معادله‌ی خطوطی را بنویسید که موازی خط $15 = 12x - 5y$ بوده و به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از آن قرار داشته باشند.

۷۵. مساحت یک مثلث ۳ سانتی‌متر مربع و دو رأس آن $A(3, 1)$ و $B(1, -3)$ می‌باشند و مرکز ثقل مثلث روی محور طول است. مختصات نقطه‌ی C را پیدا کنید.

۷۶. نقطه‌ی $A(۵, ۳)$ یکی از رئوس مثلث ABC و خطوط $y = x + ۱$ و $y = -x + ۳$ میانه‌های BB' و CC' از این مثلث می‌باشند. مختصات دو رأس B و C را به دست آورید.

۷۷. معادله‌ی عمومی قطرهای دایره‌ای به صورت $(۳m^۲ + m - ۱۵)x + (۱ - ۲m)y = ۰$ می‌باشد.

اولاً: مختصات مرکز دایره را پیدا کنید.

ثانیاً: اگر این دایره بر خط $۳x - ۴y = ۱۰$ مماس باشد، اندازه‌ی شعاع دایره را حساب کنید.

۷۸. معادله‌ی خطی را بنویسید که با هر یک از دو خط زیر موازی باشد و در ضمن از آن‌ها به یک فاصله باشد.

$$۲x + ۳y - ۶ = ۰ \qquad ۴x + ۶y + ۱۷ = ۰$$

۷۹. مساحت مثلثی ۸ واحد مربع و $A(۱, -۲)$ و $B(۲, ۳)$ دو رأس آن می‌باشند. اگر رأس C روی خط $۲x + y - ۲ = ۰$ قرار داشته باشد، مختصات آن را تعیین کنید.

۸۰. معادله‌ی قطرهای دایره‌ای در حالت کلی به صورت زیر است.

$$(m + n - ۱)x + (m - n + ۳)y + n - ۳m - ۵ = ۰$$

اولاً: مختصات مرکز دایره را تعیین کنید.

ثانیاً: معادله‌ی مماس بر دایره را در نقطه‌ی $A(-۲, ۳)$ واقع بر دایره بنویسید.

ثالثاً: قطری را مشخص کنید که بر نیمساز ناحیه‌ی اول عمود باشد.

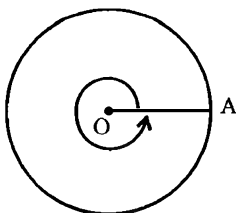
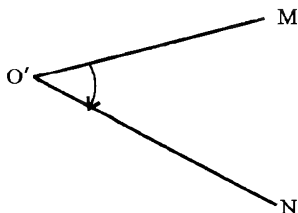
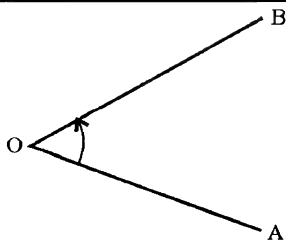
👉 فصل یازدهم

مثلثات

موضوع این بخش از ریاضیات بررسی روابط بین اضلاع و زوایا در یک مثلث می‌باشد. یکی از اهداف این بخش یافتن فرمول‌هایی است که بتوان فاصله‌ها را به صورتی غیرمستقیم محاسبه کرد. مثلثات کاربرد وسیعی در نقشه‌برداری، دریانوردی، علوم مهندسی، فیزیک و نجوم دارد. مهندسين نقشه‌بردار با استفاده از مترهای فلزی و دستگاه‌های زاویه‌یاب به ترتیب فواصل و زوایا را اندازه‌گیری می‌کنند. سپس با استفاده از مثلثات فواصل و زوایای دیگر را محاسبه می‌کنند. بدین ترتیب آن‌ها می‌توانند برای ساختمان‌های گوناگون، نقشه‌ها و مشخصات لازم را تهیه نمایند. بدون مثلثات، نقشه‌برداری و دریانوردی با اشکال‌های عمده مواجه می‌شدند و سؤال‌های اساسی مانند فواصل بین زمین و خورشید و ماه و ستارگان دیگر بدون پاسخ می‌ماند.

☆ زاویه

از دَوَران یک نیم‌خط حول رأسش ناحیه‌ای پدید می‌آید که زاویه نامیده می‌شود. این دَوَران ممکن است در جهت و یا خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. در مثلثات جهت مثلثاتی خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد و قرارداد شده که زوایایی که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند مثبت و زوایایی که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند منفی باشند. در زیر زوایای \widehat{AOB} (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و \widehat{MON} (هم‌جهت با حرکت عقربه‌های ساعت) دیده می‌شوند.



اگر نیم خط Ox حول رأس (O یعنی O) در یکی از دو جهت چنان دوران کند تا دوباره بر نقطه شروع منطبق شود گوییم یک دوران کامل انجام شده. از دوران کامل پاره خط OA حول نقطه‌ی O ، یک دایره پدید می‌آید.

☆ واحدهای اندازه‌گیری زاویه

سه واحد اصلی در مثلثات برای اندازه‌گیری زاویه‌ها کاربرد دارند که عبارتند از درجه، گراد و رادیان که ذیلاً به آن‌ها اشاره می‌شود.

☆ تعریف درجه

اگر محیط یک دایره را به 360 قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک درجه می‌نامند. به عبارتی $\frac{1}{360}$ دوران کامل، زاویه‌ای به اندازه‌ی یک درجه پدید می‌آورد. برای نمایش درجه از علامت « $^\circ$ » استفاده می‌شود. لذا می‌توان گفت:

$$\boxed{1^\circ = \frac{1}{360} \times \text{محیط دایره}}$$

اجزاء درجه عبارتند از دقیقه و ثانیه. هر دقیقه $\frac{1}{60}$ درجه و هر ثانیه $\frac{1}{60}$ دقیقه است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ای 37 درجه و 25 دقیقه و 15 ثانیه باشد، می‌نویسیم:
 $37^\circ, 25', 15''$

مثال ۱: عبارت « $37^\circ, 25', 15''$ » را فقط بر حسب دقیقه بنویسید.

حل:

$$(37^\circ, 25', 15'') = 37 \times 60 + 25 + \frac{15}{60} = 2220 + 25 + \frac{1}{4} = \left(\frac{11321}{4} \right)$$

☆ تعریف گراد

اگر محیط یک دایره را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک گراد می‌نامند. به عبارتی $\frac{1}{400}$ دُوران کامل، زاویه‌ای به اندازه‌ی یک گراد پدید می‌آورد. برای نمایش گراد از علامت «gr» استفاده می‌شود. لذا می‌توان گفت:

$$1gr = \frac{1}{400} \times \text{محیط دایره}$$

اجزاء گراد عبارتند از دسی‌گراد، سانتی‌گراد و میلی‌گراد که هر کدام به ترتیب $\frac{1}{10}$ گراد، $\frac{1}{100}$ گراد و $\frac{1}{1000}$ گراد می‌باشند. مثلاً اگر اندازه‌ی زاویه‌ای ۳۷ گراد و ۲ دسی‌گراد و ۸ میلی‌گراد باشد می‌نویسیم: ۳۷/۲۰۸ گراد.


☆ تعریف رادیان

دایره‌ای به شعاع l را در نظر بگیرید. می‌دانیم محیط این دایره $2\pi l$ است. یک رادیان بنا به تعریف اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی از دایره است که طول آن کمان برابر شعاع دایره باشد. برای نمایش رادیان از کلمه «rad» استفاده می‌شود. بنابراین محیط هر دایره برحسب رادیان 2π رادیان است و لذا:

$$1rad = \frac{1}{2\pi} \times \text{محیط دایره}$$

مثال ۲ : اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی از دایره که طول آن کمان $\frac{1}{6}$ محیط دایره

است، چند رادیان است؟

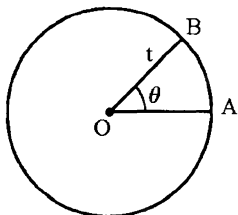
حل: 

با یک تناسب ساده داریم:

اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان 2π طول کمان $2\pi l$

$$x = \frac{\frac{1}{6} \times 2\pi l \times 2\pi}{2\pi l} = \frac{\pi}{3} rad$$

تبدیل واحدهای اندازه‌گیری



دایره‌ای به شعاع l و زاویه‌ی $AOB = \theta$ در این دایره را در نظر بگیرید. فرض کنید اندازه‌ی زاویه‌ی θ برحسب درجه D ، برحسب گراد G و برحسب رادیان R باشد. خواهیم داشت:

(۱)

اندازه‌ی زاویه برحسب درجه 360° طول کمان $2\pi l$

$$\widehat{AB} \quad D \quad \Rightarrow AB = \frac{2\pi l D}{360} = \frac{\pi l D}{180}$$

(۲)

اندازه‌ی زاویه برحسب گراد 400° طول کمان $2\pi l$

$$\widehat{AB} \quad G \quad \Rightarrow AB = \frac{2\pi l G}{400} = \frac{\pi l G}{200}$$

(۳)

اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان 2π طول کمان $2\pi l$

$$\widehat{AB} \quad R \quad \Rightarrow AB = \frac{2\pi l R}{2\pi} = l R$$

چون طول کمان AB مقداری ثابت است، خواهیم داشت:


$$\frac{2\pi l D}{180} = \frac{2\pi l G}{200} = l R$$

و یا:

$$\boxed{\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

مثال ۳: اندازه‌ی زاویه‌ای ۲۰ گراد است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه و رادیان

چيست؟

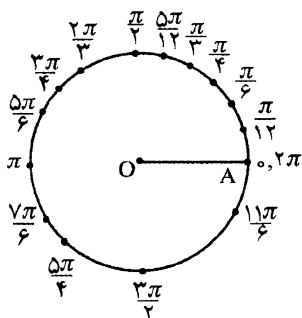
حل: 

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{D}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow \frac{D}{9} = \frac{20}{10} \Rightarrow D = 18^\circ$$

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{20}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{10}$$

مثال ۴: در جدول زیر اندازه‌ی برخی از زاویه‌ها بر حسب درجه و رادیان نوشته شده است.

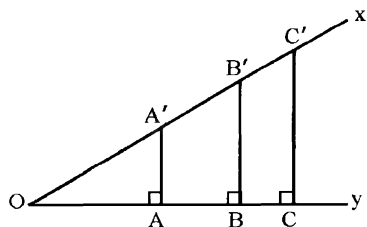
درجه	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۲۵	۲۷۰	۳۳۰	۳۶۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π



همچنین در یک دوران کامل این زاویه‌ها بر محیط دایره با فرض این که پاره‌خط OA حول نقطه‌ی O در جهت مثلثاتی حرکت کرده مشخص شده‌اند.

☆ تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویه

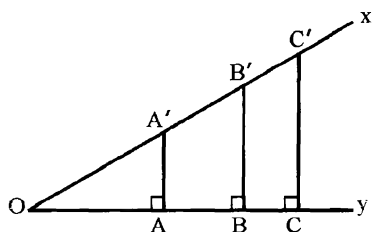
زاویه‌ی \hat{xOy} را در شکل مقابل در نظر بگیرد. نقاط A و B و C را روی oy اختیار کرده و عمودهایی بر همان ضلع رسم می‌کنیم تا ضلع ox را در نقاط A' و B' و C' قطع کنند.



$$\triangle OAA' \sim \triangle OBB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} \quad (1)$$

$$\triangle OAA' \sim \triangle OCC' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{AA'}{OA} = \frac{CC'}{OC} \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم نسبت‌های $\frac{AA'}{OA}$ و $\frac{BB'}{OB}$ و $\frac{CC'}{OC}$ با هم برابر و مقدار ثابتی می‌باشند که این مقدار ثابت را تانژانت زاویه O می‌نامیم و آنرا به صورت $\tan \hat{O}$ نشان می‌دهیم.



به همین ترتیب می‌توان گفت

که این مقدار ثابت $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'}$ را کوتانژانت زاویه O نامیده و آنرا به صورت $\cot \hat{O}$ نشان می‌دهیم.

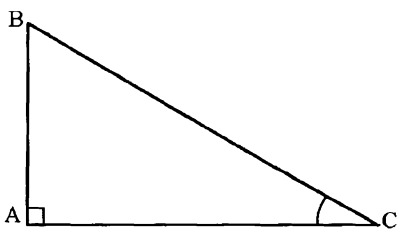
برای تعریف سینوس یک زاویه و کسینوس همان زاویه شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید.

$$\triangle OAA' \sim \triangle OBB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} \quad (۱)$$

$$\triangle OAA' \sim \triangle OCC' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'} = \frac{OA'}{OC'} \Rightarrow \frac{AA'}{OA'} = \frac{CC'}{OC'} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'}$$

سه نسبت فوق که با هم برابر و مقداری ثابت می‌باشند سینوس زاویه O نامیده می‌شوند و آنرا به صورت $\sin \hat{O}$ نشان می‌دهیم.



به همین ترتیب می‌توان گفت نسبت‌های $\frac{OA}{OA'}$ و

$\frac{OB}{OB'}$ و $\frac{OC}{OC'}$ با هم برابرند که این نسبت را

کسینوس زاویه O نامیده و آنرا به صورت $\cos \hat{O}$ نشان می‌دهیم.

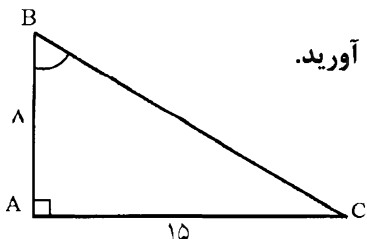
به طور خلاصه در مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sin C = \frac{\text{ضلع مقابل وتر}}{BC} = \frac{AB}{BC} \quad \cos C = \frac{\text{ضلع مجاور وتر}}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan C = \frac{\text{ضلع مقابل ضلع مجاور}}{AC} = \frac{AB}{AC} \quad \cot C = \frac{\text{ضلع مجاور ضلع مقابل}}{AB} = \frac{AC}{AB}$$

نکته: با توجه به این که وتر مثلث از اضلاع دیگر بزرگتر است می توان گفت سینوس \widehat{C} کوچکتر از واحد می باشند.

مثال ۵: در شکل زیر نسبت های مثلثاتی \widehat{B} را به دست آورید.



حل:

$$BC = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17} \qquad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17}$$

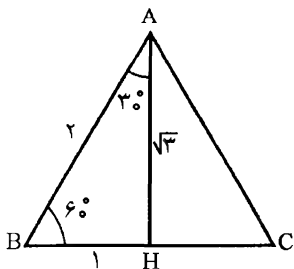
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8} \qquad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{15}$$

مثال ۶: نسبت های مثلثاتی زوایای 30° و 60° را حساب کنید.

حل:

مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۲ سانتی متر (یا هر اندازه‌ی دیگر) را در نظر می گیریم. ارتفاع AH را رسم می کنیم. می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع، نیمساز و میانه نیز می باشد. در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABH$ داریم:

$$AB = 2, \quad BH = 1, \quad AH^2 = AB^2 - BH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot 60^\circ$$

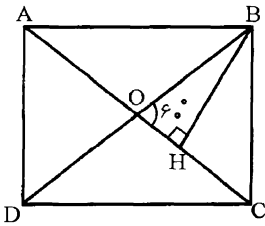
$$\cot 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

مثال ۷: طول قطر مستطیل ۸ سانتی متر و

زاویه حاده بین دو قطر آن 60°

است. مساحت مستطیل چند

سانتی متر مربع است؟



حل:

مستطیل $ABCD$ را رسم می کنیم. فرض کنیم O محل برخورد دو قطر باشد. از B عمود BH را بر قطر AC فرود می آوریم. در مثلث قائم الزاویه OBH داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{4} \Rightarrow \boxed{BH = 2\sqrt{3}}$$

مساحت مستطیل $ABCD$ دو برابر مساحت $\triangle ABC$ است.

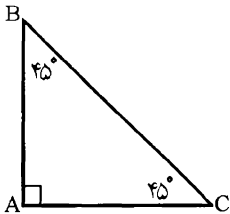
$$S_{ABCD} = 2 \times S_{\triangle ABC} \Rightarrow 2 \times \frac{AC \times BH}{2} = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

مثال ۸: نسبت های مثلثاتی زاویه ی 45° را محاسبه کنید.

حل:

مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین ABC به اضلاع زاویه قائمه یک سانتی متر را در نظر می گیریم.

بدیهی است که: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$



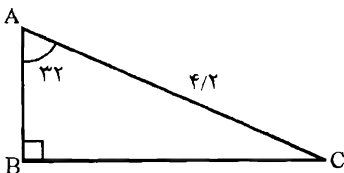
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$


$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{1} = 1, \cot \hat{B} = 1$$

مثال ۹: در شکل مقابل اندازه ی AB را حساب


کنید. ($\sin 58^\circ = 0.848$)



حل: 

$$\hat{A} = 90 - 32 = 58$$

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0.848 = \frac{AB}{4/2} \Rightarrow AB = 4/2 \times 0.848 = 3/56$$


مثال ۱۰: در شکل مقابل اندازه‌ی AB را حسابکنید. ($\cot 57^\circ = 0.6494$)حل: 

$$\hat{A} = 90 - 33 = 57$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} \Rightarrow 0.6494 = \frac{AB}{45} \Rightarrow AB = 45 \times 0.6494 = 29/22$$

مثال ۱۱: طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۲ سانتی‌متر و سینوس یک زاویه‌ی آن $\frac{2}{3}$ است.

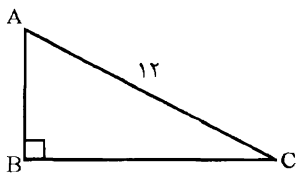
محیط این مثلث را حساب کنید.

حل: 

$$\sin \hat{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BC}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow BC = 8$$

$$AB = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$12 + 8 + 2\sqrt{15} = 20 + 2\sqrt{15} \text{ محیط مثلث}$$




بدین ترتیب نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60° (با معادل رادیانی $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$)

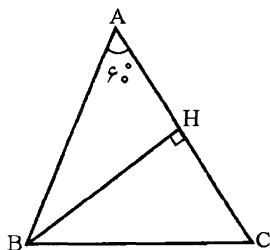
را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

θ نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال ۱۲: مثلث ABC با مفروضات $\hat{A} = ۶۰^\circ$ ، $AB = ۷$ و $AC = ۱۲$ را در نظر بگیرید.
مطلوب است طول BC

حل: 

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم.



$$\triangle ABH : \cos ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{7} \Rightarrow \boxed{AH = \frac{7}{2}}$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 49 - \frac{49}{4} = \frac{3 \times 49}{4}$$


$$\Rightarrow \boxed{BH = \frac{7\sqrt{3}}{2}}$$

$$CH = AC - AH = 12 - \frac{7}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\triangle BCH : BC^2 = BH^2 + CH^2 = \frac{147}{4} + \frac{289}{4} = \frac{436}{4} = 109 \Rightarrow BC = \sqrt{109}$$

مثال ۱۳: حاصل عبارت زیر چقدر است؟

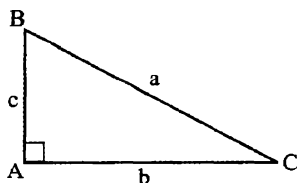
$$A = \frac{\sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ}{1 - \tan ۳۰^\circ \cot ۶۰^\circ} + \frac{1 + \sin^2 ۶۰^\circ}{2 \tan^2 ۳۰^\circ} - \frac{2\sqrt{3} \tan ۳۰^\circ}{2 - \sin^2 ۶۰^\circ}$$

حل: 

$$A = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{2\sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} =$$

$$\frac{3}{8} + \frac{21}{8} - \frac{8}{5} = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$$

مثال ۱۴: با توجه به شکل درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin B = \cos C$ ب) $\cos B = \sin C$ ج) $\tan B = \cot C$ د) $\cot B = \tan C$ حل: 

الف) $\sin B = \frac{b}{a} = \cos C$

ب) $\cos B = \frac{c}{a} = \sin C$

ج) $\tan B = \frac{b}{c} = \cot C$

د) $\cot B = \frac{c}{b} = \tan C$

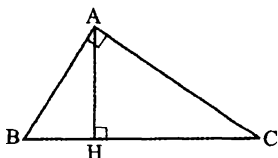

نکته: به طور کلی سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است. به همین ترتیب تانژانت یک زاویه با کتانژانت متمم آن زاویه برابر است.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

مثال ۱۵: در شکل زیر $\widehat{A} = 90^\circ$ است. به کمک نسبت‌های مثلثاتی ثابت کنید:

$$AH^2 = BH \times CH$$

حل: 

$$\tan \widehat{B} = \frac{AH}{BH}$$

$$\cot \widehat{C} = \frac{CH}{AH}$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \tan \widehat{B} = \cot \widehat{C} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$$

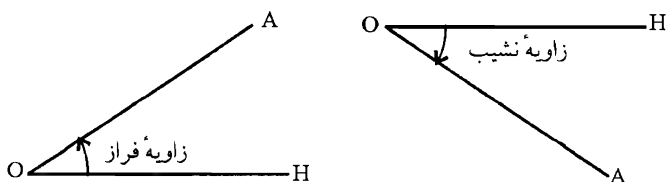
$$\Rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

کاربرد حل مثلث قائم الزاویه در تعیین بلندی‌ها و فاصله‌ها

مقصود تعیین بلندی یک نقطه از سطح زمین و تعیین فاصله‌ی دو نقطه است که دسترسی به آن‌ها میسر نمی‌باشد.

برای این منظور زاویه‌ی فراز و زاویه‌ی نشیب را تعریف می‌کنیم.

زاویه‌ی فراز و زاویه‌ی نشیب: هرگاه چشم ناظر در نقطه‌ی O قرار گیرد و نقطه‌ی A را نگاه کند نیم‌خط OA با صفحه‌ی افقی (صفحه‌ی موازی سطح آب‌های ساکن کم‌وسعت) H که بر نقطه‌ی O می‌گذرد زاویه‌ای پدید می‌آورد. اگر نقطه‌ی A بالای صفحه‌ی افقی H باشد زاویه‌ی HOA زاویه‌ی فراز و در صورتی که نقطه‌ی A پایین صفحه‌ی افقی H باشد زاویه‌ی HOA زاویه‌ی نشیب نقطه‌ی A از O می‌نامند.



مثال ۱۶: از نقطه‌ی O که از سطح زمین $۱/۲۴m$ ارتفاع دارد زاویه‌ی فراز بالاترین نقطه‌ی یک درخت ۳۲° است. فاصله‌ی O از درخت برابر با $۷/۱۴m$ می‌باشد. بلندی درخت را تعیین کنید. ($\tan ۳۲ = ۰/۶۲۲۹$).

حل:

$$\text{بلندی درخت} = DB + BA = ۱/۲۴m + BA$$

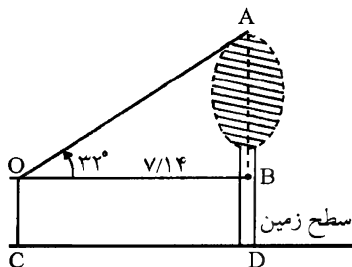
برای تعیین BA در مثلث قائم الزاویه‌ی OBA

می‌توان نوشت:


$$\tan ۳۲ = \frac{BA}{OB} \Rightarrow ۰/۶۲۲۹ = \frac{BA}{۷/۱۴}$$

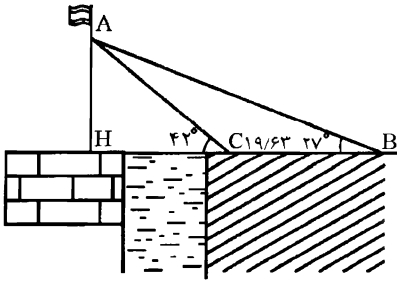
$$BA = ۷/۱۴ \times ۰/۶۲۲۹ = ۴/۴۴m$$

$$DA = ۱/۲۴ + ۴/۴۴ = ۵/۶۸m$$



مثال ۱۷: از نقطه‌ی B زاویه‌ی فراز سربرجی (زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه‌ی برج) 27° است. با حرکت کردن به طرف برج و پیمودن مسافت $19/63m$ زاویه‌ی فراز همان نقطه از برج 42° می‌شود. ارتفاع برج را تعیین کنید.
 $(\cot 27 = 1/9626, \cot 42 = 1/1106)$

حل: 



$$HA = x = \text{بلندی برج}$$

چون $CB = 19/63m$ معلوم است، ابتدا هریک از دو فاصله‌ی HB و HC را بر حسب طول مجهول x به دست آورده و تفاضل آن‌ها که برابر با مقدار داده شده‌ی CB است را می‌نویسیم:

$$\triangle AHB : HB = HA \times \cot \angle HBA = HA \cot 27^\circ$$

$$\triangle AHC : HC = HA \times \cot \angle HCA = HA \cot 42^\circ$$

$$HB - HC = HA \cot 27^\circ - HA \cot 42^\circ = HA (\cot 27^\circ - \cot 42^\circ)$$

$$CB = HA (\cot 27^\circ - \cot 42^\circ) \Rightarrow HA = \frac{19/63}{1/9626 - 1/1106} = \frac{19/63}{0/8530} = 23/03$$

مثال ۱۸: برای تعیین عرض رودخانه‌ای دو نقطه‌ی

B و C را در دو طرف ساحل آن در نظر

گرفته و نقطه‌ی D را در روی امتداد BC

و نزدیک رودخانه تعیین کرده‌ایم. از

نقطه‌ی A که در امتداد خط شاقولی

مرورکننده بر D و به فاصله $1/65$ متر از

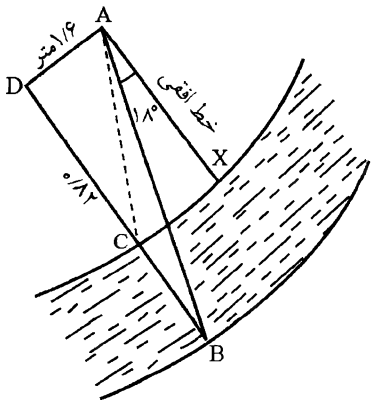
آن واقع می‌باشد زاویه‌ی نشیب نقطه‌ی


B برابر 18° است. در صورتی که

فاصله‌ی DC برابر با $0/82m$ باشد

عرض رودخانه را به دست آورید.

$$(\tan 72 = 3/0777)$$



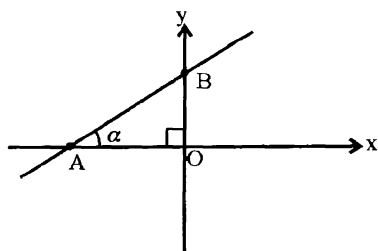
حل: 

$$\widehat{BAD} = 90 - 18 = 72$$

$$\triangle ADB : DB = DA \times \tan \widehat{DBA} = 1/65 \times \tan 72$$

$$DB = 1/65 \times 3/0.777 = 5/0.5$$

$$\text{عرض رودخانه} = CB = DB - DC = 5/0.7 - 0/82 = 4/25$$



☆ شیب خط و تانژانت زاویه

خطی به معادله‌ی $y = mx + d$ را در نظر بگیرید.

این خط در نقاط $A(-\frac{d}{m}, 0)$ و $B(0, d)$

محورهای عرض و طول را قطع می‌کند که نمودار آن


با فرض $m > 0$ به صورت زیر است:

$$\triangle OAB : \tan \alpha = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|d|}{\left|-\frac{d}{m}\right|} = \left|\frac{d}{-\frac{d}{m}}\right| = |-m| = m$$

ملاحظه می‌شود شیب خط با تانژانت زاویه‌ای که محور Ox با خط می‌سازد برابر است.

مثال ۱۹: معادله‌ی خطی را بنویسید که با محور طول زاویه‌ی 30° بسازد و از

نقطه‌ی $A(\sqrt{3}, 3)$ بگذرد.

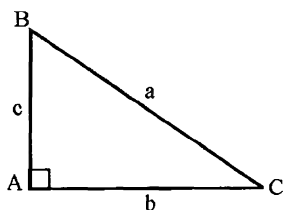
حل: 

$$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3}) \Rightarrow 3y - 9 = \sqrt{3}x - 3$$

$$3y = \sqrt{3}x + 6 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$$

مثال ۲۰: با توجه به شکل درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.



(الف) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

(ب) $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$

(ج) $\cot B = \frac{\cos B}{\sin B}$

(د) $\tan B \times \cot B = 1$

حل:

(الف) $\sin^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

(ب) $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \tan B$

(ج) $\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \cot B$

(د) $\tan B \times \cot B = \frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1$

چهار اتحاد فوق اتحادهای اصلی مثلثاتی می‌باشند و همواره برقرارند.

مثال ۲۱: اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به کمک

اتحادها حساب کنید.

حل:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

☆ نگاهی کامل تر به نسبت های مثلثاتی

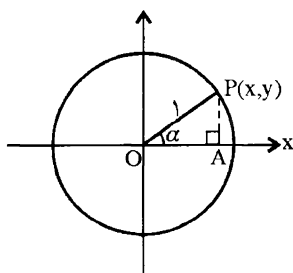
تا اینجا نسبت مثلثاتی را در یک مثلث قائم الزاویه و برای زاویه های حاده تعریف کرده ایم. اما نسبت های مثلثاتی زاویه ی قائمه، زاویه های منفی و زاویه های بزرگ تر از 90° را تعریف نکرده ایم. برای این که تعریف جامعی از نسبت های مثلثاتی ارائه کنیم در صفحه ی مختصات دایره ای به شعاع یک به مرکز مبدأ مختصات رسم کرده و نقطه ی $P(x, y)$ را روی دایره اختیار می کنیم. نسبت های مثلثاتی زاویه ای که شعاع حامل OP با نیم خط ox در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت می سازد را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$


$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

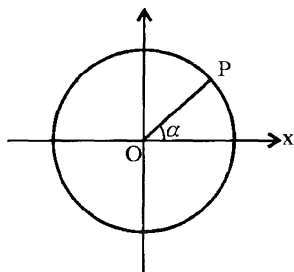
$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$



با توجه به این که عرض نقطه ی P حداکثر یک و حداقل -1 می باشد می توان گفت $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ به همین ترتیب طول نقطه ی P نیز حداکثر یک و حداقل -1 می باشد. پس $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ و اما تانژانت و کتانژانت هر عددی می توانند باشند.

مثال ۲۲: در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی متر و $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ نقطه‌ی دلخواه روی دایره است. نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

حل: 




$$\cos \alpha = x_P = \frac{1}{2}$$

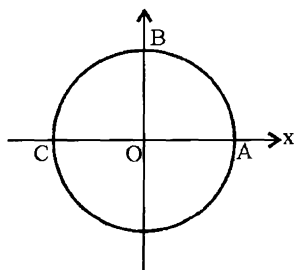
$$\sin \alpha = y_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۲۳: با توجه به شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۹۰° و ۱۸۰° را حساب کنید.

حل: 



$$\widehat{AOB} = 90^\circ \quad B(0, 1)$$

$$\sin 90^\circ = y = 1 \quad \cos 90^\circ = x = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \quad \text{تعرف نشده}$$

$$\cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\widehat{AOC} = 180^\circ \quad C(-1, 0)$$

$$\sin 180^\circ = y = 0$$

$$\cos 180^\circ = x = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} \quad \text{تعریف نشده}$$

مثال ۲۴ : نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 120° را حساب کنید.

حل:

$$\widehat{BOP} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow PC = \frac{OP}{2} = \frac{1}{2}$$

$$OD = PC = \frac{1}{2} \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2}$$

$$OC = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sin 120^\circ = y_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = x_P = \frac{-1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

همان‌طوری که از حل مثال فوق ملاحظه می‌کنیم اگر زاویه‌ای بین 90° و 180° باشد سینوس آن مثبت و سایر نسبت‌های مثلثاتی آن منفی می‌شوند.

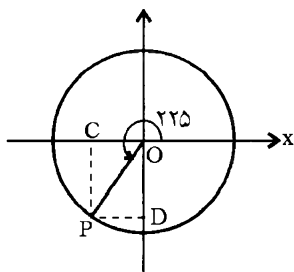
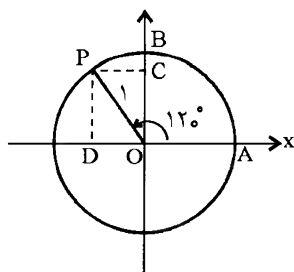
مثال ۲۵ : نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 225° را به‌دست آورید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{COP} = 225^\circ \\ OP = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow OC = CP = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_P = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad y_P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$




$$\sin 225^\circ = y_P = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 225^\circ = x_P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \frac{y_P}{x_P} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad \cot 225^\circ = \frac{x_P}{y_P} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

ملاحظه می‌شود اگر زاویه‌ای بین 180° و 270° باشد سینوس و کسینوس آن منفی و تانژانت و کتانژانت آن مثبت می‌باشند.
به طور کلی علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه به صورت زیر است.

α	0°	90°	180°	270°	360°				
$\sin \alpha$	۰	+	۱	+	۰	-	-۱	-	۰
$\cos \alpha$	۱	+	۰	-	-۱	-	۰	+	۱
$\tan \alpha$	۰	+	نامعین	-	۰	+	نامعین	-	۰
$\cot \alpha$	نامعین	+	۰	-	نامعین	+	۰	-	نامعین

مثال ۲۶: اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.


حل: 

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

مثال ۲۷: ماکزیمم و مینیمم عبارت $A = 1 - 2\cos \alpha$ را حساب کنید.

حل: 

$$\max A = 1 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$$

$$\min A = 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$$

☆ اتحادهای مثلثاتی

در شکل زیر دایره‌ای به شعاع یک به مرکز O رسم شده است.

$$PH^2 + OH^2 = OP^2$$

$$y^2 + x^2 = 1$$


$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2})$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$$


$$\tan \alpha \times \cot \alpha = \frac{y}{x} \times \frac{x}{y} = 1$$

مثال ۲۸: اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $\alpha \neq k\pi$ ، ثابت کنید: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

حل: 

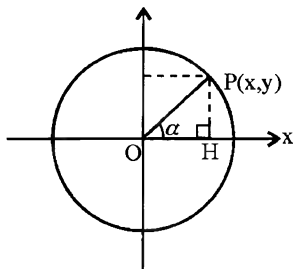

$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

مثال ۲۹: اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ، ثابت کنید: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

حل: 


$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

مثال ۳۰: ثابت کنید $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

حل: 


$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

مثال ۳۱: ثابت کنید $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

حل: 

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= 1^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \times 1 = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

مثال ۳۲: اگر $\tan \alpha = \sqrt{3}$ و $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

حل: 

اگر α زاویه‌ای بین 180° و 270° باشد سینوس و کسینوس زاویه منفی و تانژانت و کتانژانت زاویه مثبت می‌باشند.


$$\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 3 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$


$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۳۳: ثابت کنید: $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

حل: 


$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

مثال ۳۴: ثابت کنید: $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

حل: 


$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1 + \cos x} &= \frac{\sin x (1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}\end{aligned}$$

مثال ۳۵ : ثابت کنید: $\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} + \tan^2 x$

حل: 

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 y = \left(1 + \tan^2 x\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right) = \tan^2 x + \frac{1}{\cos^2 y}$$

مثال ۳۶ : ثابت کنید: $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$


حل: 

$$\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \frac{\tan x + \tan y}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} = \frac{\tan x + \tan y}{\frac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y}} =$$

$$\frac{(\tan x + \tan y) \tan x \cdot \tan y}{(\tan x + \tan y)} = \tan x \cdot \tan y$$

مثال ۳۷ : حدود زاویه‌ی θ را چنان تعیین کنید که تساوی زیر درست باشد.

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta$$

حل: 

اگر $\cos \theta > 0$ باشد تساوی فوق درست است. این در صورتی است که $0 < \theta < 90^\circ$ یا $270^\circ < \theta < 360^\circ$ باشد.


$$\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}}$$

∴

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{(1-\sin \theta)^2}}{\sqrt{\cos^2 \theta}} = \frac{|1-\sin \theta|}{|\cos \theta|} = \frac{1-\sin \theta}{|\cos \theta|} \quad \underline{\cos \theta > 0} \quad \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta
 \end{aligned}$$

مثال ۳۸: اگر $\cot x = -\frac{1}{3}$ ، حاصل عبارت زیر را حساب کنید.


$$\frac{\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{2} \sin x}{3 \sin x - 3 \cos x}$$

حل: 

صورت و مخرج کسر را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{2} \sin x}{3 \sin x - 3 \cos x} &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{\sin x}}{\frac{3 \sin x}{\sin x} - \frac{3 \cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{2}{3} \cot x - \frac{1}{2}}{3 - 3 \cot x} \\
 &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{-1}{3} - \frac{1}{2}}{3 - 3 \times \frac{-1}{3}} = \frac{\frac{-2}{9} - \frac{1}{2}}{3 + 1} = \frac{\frac{-13}{18}}{4} = \frac{-13}{72}
 \end{aligned}$$


مثال ۳۹: اگر $\tan x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ باشد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟

حل: 

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{a+b}}$$

$$\frac{b+a}{b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow a=b$$

مثال ۴۰: ماکزیمم و مینیمم عبارت مقابل را حساب کنید. $A = \sin^2 x - \sin x + 1$

حل: 

$$A = \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$


اگر $\sin x = -1$ باشد ماکزیمم A به دست می آید. اگر $\sin x = \frac{1}{2}$ باشد کمترین مقدار A به دست می آید.

$$\max A = \left(-1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\min A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال ۴۱: در دستگاه زیر رابطه‌ای مستقل از x بین a و b پیدا کنید.

$$\begin{cases} \tan x + \frac{1}{\cos x} = a \\ \frac{1}{\cos x} - \tan x = b \end{cases}$$

حل: 

از جمع طرفین دو تساوی داریم:

$$\frac{2}{\cos x} = a + b \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

با قرار دادن در معادله‌ی اول دستگاه خواهیم داشت:

$$\tan x + \frac{a+b}{2} = a \Rightarrow \tan x = \frac{a-b}{2} \quad (2)$$

$$1 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{با استفاده از اتحاد}$$


$$1 + \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$$

$$4 + a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$4 = 4ab \Rightarrow ab = 1$$

مثال ۴۲: رابطه‌ای مستقل از x بین a و b در دستگاه زیر پیدا کنید.

$$\begin{cases} \tan^2 x + \cot^2 x = a \\ \tan^4 x + \cot^4 x = b \end{cases}$$

حل: 

$$\left(\tan^2 x + \cot^2 x \right)^2 = a^2 \Rightarrow \tan^4 x + \cot^4 x + 2 = a^2$$

$$b + 2 = a^2$$

☆ سکانت و کُسکانت یک زاویه

اگر $a \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) باشد وارون $\cos \alpha$ را سکانت α نامیده و با نماد $\sec \alpha$

نشان می‌دهند. پس:


$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

همچنین اگر $a \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) باشد وارون $\sin \alpha$ را کُسکانت α نامیده و با نماد

$\operatorname{cosec} \alpha$ یا مختصراً $\csc \alpha$ نشان می‌دهند. پس:

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

مثال ۴۳: حاصل $\sec^2 \frac{\pi}{6} \times \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) + \csc^2 \frac{\pi}{6} \left(1 + \sin \frac{\pi}{3} \right)$ چقدر است؟

حل: 

$$\sec^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

با جای گذاری داریم:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} + 4 + 2\sqrt{3} = \frac{14 + 6\sqrt{3}}{3}$$

تمرین‌های فصل یازدهم

۱. زاویه‌های ۱۳۵° ، ۲۱۰° ، ۲۷۰° و ۳۳۰° را بر حسب رادیان به دست آورید.

۲. زاویه‌های $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{4}$ را بر حسب درجه به دست آورید.

۳. در مثلث ABC اگر $\widehat{C} = 90^\circ$ و $\sin A = \frac{21}{43}$ و $AB = ۱۲/۴۵m$ باشد، اندازه‌ی ضلع BC را حساب کنید.

۴. در مثلث ABC ، $\widehat{C} = 90^\circ$ ، $AC = ۷۲/۶m$ و $\cot B = \frac{3}{14}$ است. اندازه‌ی ضلع AB را به دست آورید.

۵. نیم‌دایره‌ای به قطر AB داده شده است. مماس در نقطه‌ی B را بر این نیم‌دایره رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی A قاطعی می‌کشیم تا نیم‌دایره را در C و مماس مزبور را در D قطع کند. اگر α زاویه‌ی بین قاطع و قطر AB بوده و $AD = ۴AC$ باشد اندازه‌ی α چقدر است؟

۶. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ - 2 \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

ب) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

ج) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ - \tan 45^\circ$

د) $\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$

۷. درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

ب) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

ج) $1 - 2\sin^2 45^\circ = \cos 90^\circ$

د) $\frac{2\tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \sin 60^\circ$

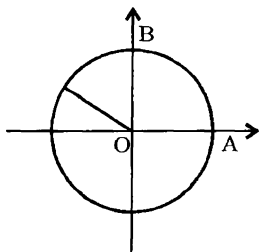
۸. از نقطه‌ی O که به ارتفاع $1/36$ متر از سطح زمین قرار دارد زاویه‌ی فراز برجی برابر با 21° است. در صورتی که فاصله‌ی نقطه از پای برج 42 متر باشد ارتفاع برج را تعیین کنید. ($\tan 21^\circ = 0/3839$)

۹. ارتفاع مناره‌ای 12 متر است. زاویه‌ی فراز سر مناره در نقطه‌ی A برابر 30° است. فاصله‌ی نقطه‌ی A از پای مناره چند متر است؟

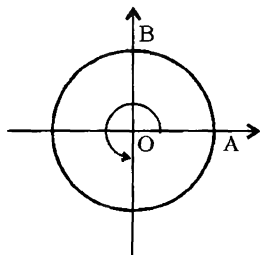
۱۰. در دو نقطه‌ی A و B که در دو طرف یک درخت واقع و با پای درخت در روی یک خط راست می‌باشند زاویه‌های فراز سر درخت را اندازه گرفته‌اند به ترتیب $(36\frac{1}{3})^\circ$ و 43° به دست آمده است. فاصله $AB = 11/6$ است. ارتفاع درخت چقدر است؟

$\tan 43^\circ = 0/9325$, $\tan(36\frac{1}{3})^\circ = 0/7355$

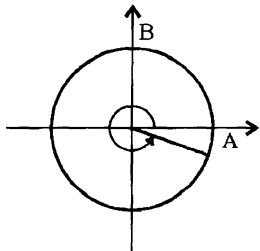
۱۱. اگر $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ و α زاویه‌ای حاده باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.



۱۲. در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی‌متر است. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 150° را حساب کنید.



۱۳. در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی متر است. نسبت های مثلثاتی زاویه 270° را حساب کنید.



۱۴. در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی متر است. نسبت های مثلثاتی زاویه 330° را حساب کنید.

۱۵. اگر $\tan \alpha = 2$ و $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی α را تعیین کنید.

۱۶. ماکزیمم و مینیمم عبارت $A = 3 - 2\sin \alpha$ را تعیین کنید.

۱۷. اگر $\sin x = -\frac{8}{17}$ و $180^\circ < x < 270^\circ$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی x را تعیین کنید.

۱۸. اگر $\tan x = -2$ و $90^\circ < x < 180^\circ$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی x را تعیین کنید.

۱۹. حدود زاویه x را چنان تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\tan x + \cot x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}}$$

۲۰. درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $1 - \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

ب) $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$

ج) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = -1$

$$د) \frac{1}{\sin^4 \theta} = 2 \cot^2 \theta + \cot^4 \theta + 1$$

$$هـ) \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\tan^4 x} = 1 + \frac{2 \cot^2 x}{\sin^2 x}$$

$$و) \frac{1}{3} (\sin^6 x + \cos^6 x) - \frac{1}{4} (\cos^3 x - \sin^3 x)^2 = \frac{1}{12}$$

$$ز) \sin^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} - \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$ح) \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$ط) \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x} = (1 + \tan x)(\tan x - 1)$$

۲۱. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$الف) (1 + \tan x + \cot x) \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$ب) \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \tan^2 x + \frac{\cos^2 x \cdot \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$ج) \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$د) 1 + \frac{\cos^2 y - \sin^2 x}{\sin^2 x \sin^2 y} = \cot^2 x \cdot \cot^2 y$$

$$هـ) \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} - \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \frac{2 \tan a}{\cos a}$$

$$و) \frac{\sin^6 x - \cos^6 x}{2 \sin^2 x - 1} = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$ز) \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$ح) \frac{\sin^4 x \cdot \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cos^4 x \cdot \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{ط)} \frac{(1 + \cos b)(\tan b - \sin b)}{\sin^3 b} = \frac{1}{\cos b}$$

$$\text{ی)} \frac{1 - \tan^2 x}{\sin x} - \frac{1 - \cot^2 x}{\cos x} = \frac{(2 \cos^2 x - 1)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$\text{ک)} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)} = \frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$$

$$\text{ل)} \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x - \cot^2 x} = \tan^2 x$$

$$\text{م)} \cot^2 x \cdot \frac{\sec x - 1}{\sin x + 1} + \sec^2 x \cdot \frac{\sin x - 1}{\sec x + 1} = 0$$

$$\text{ن)} \sin^6 x + \cos^6 x = 3 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 1$$

۲۲. اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ باشد با زیاد شدن α در این ناحیه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α چه

تغییری می‌کند؟

۲۳. اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ باشد آیا می‌توان گفت همواره $\sin \alpha < \cos \alpha$ ؟

۲۴. اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ باشد حدود α را تعیین کنید.

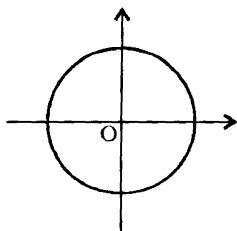
۲۵. اگر $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ باشد حدود α را تعیین کنید.

۲۶. در شکل مقابل شعاع دایره یک سانتی‌متر

است. ناحیه‌ای را در شکل مشخص کنید که

اگر α در آن ناحیه قرار گیرد $\sin \alpha > \frac{1}{3}$

شود.



۲۷. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{3} + \sqrt{5} \sin x$

ب) $\sqrt{2} - \sqrt{3} \cos x$

۲۸. اگر $\tan x = \frac{3}{4}$ بوده و انتهای کمان مقابل به x در فاصله $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ باشد حاصل

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \cos x} \text{ چیست؟}$$

۲۹. اگر داشته باشیم $\sin \theta = \frac{m}{\sqrt{2m^2 + 7m}}$ و $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، مقدار m را تعیین کنید.

۳۰. اگر داشته باشیم $\cot x = \sqrt{4 - m}$ و $\sin x = \sqrt{\frac{3}{m}}$ ، مقدار m چیست؟

۳۱. اگر داشته باشیم $\cot \alpha = 2 - 3m$ و $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3m - 1}}$ باشند، مقادیر m را

به دست آورید.

۳۲. اگر داشته باشیم $A = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ ، $A \neq -1$ ، حاصل $\tan x$ بر حسب A

چیست؟

۳۳. نشان دهید به ازاء هر عدد حقیقی m ، گزاره‌های زیر برقرارند.

$$\sin \alpha = \frac{2m}{1 + m^2} \quad \cos \alpha = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

۳۴. اگر داشته باشیم $\sin x = a - b$ و $\cos x = \sqrt{1 + 2ab}$ ، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۳۵. a و b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی زیر یک اتحاد باشد.

$$(a + b \sin x - b \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$$

۳۶. اگر $\tan x = \frac{m+1}{m}$ و $\cos x = \frac{m}{m+2}$ باشد مقدار m را به دست آورده و

نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را حساب کنید.

۳۷. اگر $\tan \alpha = \frac{a-1}{a}$ و $\cot \alpha = \frac{3}{b-2}$ باشد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟

۳۸. اگر $\sin x = \frac{a-1}{a+1}$ و $\cos y = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$ و $a > 0$ باشد حاصل $\sin^2 x + \cos^2 y$ را حساب کنید.

۳۹. از رابطه‌ی $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{a + \cot x}}$ مقدار $\tan x$ را برحسب a به‌دست آورید.
 $(a \neq -\cot x, x \neq \frac{k\pi}{2})$

۴۰. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت $A = \cos^2 x + 3\sin x + 2$ را به‌دست آورید.

۴۱. حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف)
$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$$

ب) $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x (2 - \sin^2 x \cos^2 x)$

۴۲. اگر $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ باشد علامت عبارت زیر را مشخص کنید.

$$A = (\sin \alpha - \sin \beta)(\cos \alpha - \cos \beta)$$

۴۳. اگر A و B و C زاویه‌های مثلث ABC و

$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = 1$$

باشد ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۴۴. از تساوی $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + \sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = 7$ حاصل عبارت $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ را حساب کنید.

۴۵. از تساوی $\sin(x-y) + \cos(x+y) = 2$ مقدار x و y را حساب کنید.

۴۶. اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = k$ باشد حاصل $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ را برحسب k حساب کنید.

۴۷. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تساوی زیر به ازای تمامی مقادیر α برقرار باشد.

$$\sqrt[4]{\tan \alpha} = \sin \alpha \left(\frac{a}{1 - \sin \alpha} + \frac{b}{1 + \sin \alpha} \right) \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

۴۸. اگر داشته باشیم $a \sin^2 x - b \cos^2 x = a - b$ ، ثابت کنید:

$$b \sin^4 x + a \cos^4 x = \frac{ab}{a+b}$$

۴۹. اگر داشته باشیم $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ ، حاصل $\frac{\sin^4 x}{a^3} + \frac{\cos^4 x}{b^3}$ را

بر حسب a و b به دست آورید.

۵۰. اگر $a = 3 \cos x + 4 \sin x$ و $b = 3 \sin x - 4 \cos x$ و $c = 5 \tan x$ باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5 |\sec x|$$

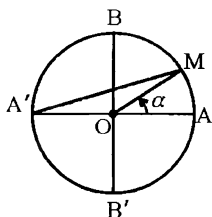
۵۱. اگر:

$$P = (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) = (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(1 - \cos \gamma)$$

باشد، ثابت کنید: $P = |\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma|$

۵۲. با شرط $\sec x - \cos x = n^3$ و $\csc x - \sin x = m^3$ ، ثابت کنید:

$$m^3 n^3 (m^3 + n^3) = 1$$



۵۳. در دایره‌ی مثلثاتی زیر ثابت کنید:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

مثلثاتی زوایای 15° و $22/5^\circ$ را به دست

آورید.

۵۴. از تساوی $\sin \theta + \csc \theta = 2$ مقدار $\cos \theta$ را به دست آورید.

۵۵. عبارت $\frac{1}{\tan x + \cot x} + 2 \sin^2 x - 3 \sin x + \cos x$ بنویسید.

۵۶. از تساوی $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ مقدار $\tan x$ را به دست آورید.

۵۷. در صورتی که $\frac{7}{12}$ $\tan x - \cot x$ بوده و انتهای کمان مقابل به x در ناحیه اول باشد، نسبت‌های مثلثاتی x را به دست آورید.

۵۸. اگر داشته باشیم $\cot \theta = -\sqrt{3}$ و $2\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی θ را حساب کنید.

۵۹. اگر α زاویه‌ای حاده باشد ثابت کنید $\tan \alpha + \cot \alpha \geq 2$.

۶۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس $\widehat{A} = 36^\circ$ و ساق $AB = AC = 1$ را در نظر بگیرید. با رسم ارتفاع وارد بر BC و نیمساز \widehat{C} و استفاده از تشابه $\triangle ABC$ و $\triangle CBD$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 18° را به دست آورید.

۶۱. به ازاء هر α ثابت کنید:

$$\frac{3 + \cos^2 \alpha}{2 - \sin \alpha} - \frac{3 + \sin^2 \alpha}{2 + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

۶۲. ثابت کنید مقدار کسر زیر به k بستگی ندارد.

$$\frac{1 - \cos x + k \sin x}{\sin x + k(1 + \cos x)}$$

۶۳. اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \pi$ باشد علامت عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = (\sin \alpha - \sin \beta)(\tan \alpha - \tan \beta)$$

۶۴. از تساوی $\sin 15^\circ \times \cos 15^\circ = \frac{1}{4}$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 15° را به دست آورید.

۶۵. در دستگاه زیر رابطه‌ای مستقل از x بین m و n تعیین کنید.

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = m \\ \frac{1}{\sin x} - \sin x = n \end{cases}$$

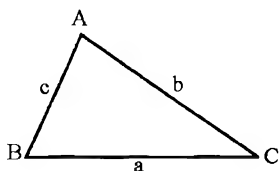
۶۶. ثابت کنید $\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{2}$

۶۷. ثابت کنید $a^2 \tan^2 \theta + b^2 \cot^2 \theta \geq 2ab$

۶۸. در مثلث ABC مساحت مثلث ۱۶ و $\tan B = \tan C = ۴$ می باشد. محیط مثلث را حساب کنید.

۶۹. اگر A و B و C زاویه های یک مثلث باشند نشان دهید:

$$\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$$



۷۰. در شکل زیر نشان دهید: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

👉 فصل دوازدهم

معادله‌ی درجه‌ی دوّم

معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی می‌باشند و $a \neq 0$ یک معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب x می‌نامند. در این معادله اگر b یا c صفر باشند معادله به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص تبدیل می‌شود.

☆ حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص

اگر معادله به صورت $ax^2 + bx = 0$ باشد، در آن از x فاکتور گرفته و به صورت حاصل ضرب دو عبارت شامل x درآورده و هرکدام را مساوی صفر قرار می‌دهیم که یکی از جواب‌ها صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ می‌شود.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$$

$$x = 0$$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

اگر معادله به صورت $ax^2 + c = 0$ باشد و a و c مختلف‌العلامه باشند جواب معادله $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ خواهد شد.


مثال ۱: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 + 3x = 0$

ب) $5x^2 - 20x = 0$

ج) $3x^2 - 48 = 0$

د) $4x^2 + 36 = 0$

حل: 

$$\text{الف) } x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$\text{ب) } 5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 5x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \text{ یا}$$

$$\text{ج) } 3x^2 - 48 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 48 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{د) } 4x^2 + 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = -36 \Rightarrow x^2 = -9$$


این معادله جواب حقیقی ندارد.

روش‌های مختلف حل معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \neq 0)$$

۱- به کمک تجزیه: در این روش سه جمله‌ای درجه‌ی دوم را به حاصل ضرب دو پرانتز تجزیه کرده و هر کدام را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۲: معادله‌ی $x^2 - x - 6 = 0$ را حل کنید.


حل: 

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

مثال ۳: معادله‌ی $4x^2 - 16x + 15 = 0$ را حل کنید.


حل: 

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(2x - 5) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$

مثال ۴: معادله‌ی $3x^2 - 2x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: 

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2 \times 3x - 3 = 0 \Rightarrow (3x - 2)(3x + 1) = 0$$


$$3x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

۲- به کمک مربع کامل سازی: در این روش ابتدا جمله‌هایی را که شامل مجهول x هستند

در یک طرف تساوی و عدد ثابت را در طرف دیگر قرار می‌دهیم. اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک است دو طرف را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم. سپس مربع نصف ضریب x را به دو طرف معادله می‌افزاییم تا یک طرف مربع کامل شود. در این حالت در صورتی که دو طرف مثبت باشند از طرفین جذر می‌گیریم.

مثال ۵: معادله‌ی $x^2 + 6x - 187 = 0$ را حل کنید.


حل: 

$$x^2 + 6x - 187 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 187 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 196 \Rightarrow x + 3 = 14 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

$$x + 3 = -14 \Rightarrow \boxed{x = -17}$$

مثال ۶: معادله‌ی $3x^2 + 4x = 15$ را حل کنید.

حل: 


$$3x^2 + 4x = 15 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{3}x = 5$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 5 + \frac{4}{9} \Rightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

$$x + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{3}}$$

$$x + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

مثال ۷: معادله $x^2 - \frac{x}{6} = \frac{7}{6}$ را حل کنید.

حل: 

$$x^2 - \frac{x}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow x^2 - \frac{x}{6} + \frac{1}{144} = \frac{7}{6} + \frac{1}{144}$$

$$\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{169}{144} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{12} = \frac{13}{12} \Rightarrow x = \frac{7}{6} \\ x - \frac{1}{12} = -\frac{13}{12} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۳- دستور کلی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم: برای به دست آوردن دستور کلی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم از روش مربع کامل سازی کمک می‌گیریم.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$ax^2 + bx = -c \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

در صورتی که $b^2 - 4ac$ نامنفی باشد خواهیم داشت:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

مبین معادله‌ی درجه‌ی دوم: عبارت $b^2 - 4ac$ را که وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به علامت آن بستگی دارد مبین معادله می‌نامند و آن را با حرف Δ نمایش می‌دهند.

اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، معادله دارای یک ریشه است که آن را ریشه‌ی مضاعف می‌نامند.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$


اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ابتدا مبین معادله را به‌دست می‌آوریم. اگر Δ مثبت باشد از دستور کلی معادله را حل می‌کنیم و اگر Δ صفر بود ریشه‌ی مضاعف معادله را از دستور

$$x = -\frac{b}{2a}$$

حساب می‌کنیم و اگر Δ منفی بود معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال ۸ : معادله‌ی $2x^2 + 13x - 45 = 0$ را حل کنید.

 حل:

$$a = 2, b = 13, c = -45$$


$$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times 2 \times (-45) = 169 + 360 = 529 > 0.$$

چون Δ مثبت است معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{529}}{4} = \frac{-13 + 23}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-13 - \sqrt{529}}{4} = \frac{-13 - 23}{4} = \frac{-36}{4} = -9$$

مثال ۹ : معادله‌ی $3x^2 - 5x + 2 = 0$ را حل کنید.

 حل:


$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{6} = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{6} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال ۱۰ : معادله‌ی $25x^2 - 30x + 9 = 0$ را حل کنید.


$$\Delta = (-30)^2 - 4 \times 25 \times 9 = 900 - 900 = 0$$

حل: 

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{50} = \frac{3}{5}$$

مثال ۱۱: معادله‌ی $3x^2 + 5x + 7 = 0$ را حل کنید.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 7 = 25 - 84 = -59 < 0$$

حل: 

چون ممین معادله منفی است، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

نکته: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر a و c مختلف‌العلامه باشند ممین معادله مثبت می‌شود و معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.


شرط مختلف‌العلامه بودن a و c برای وجود دو ریشه کافی است ولی لازم نیست.

☆ ساده کردن دستورها (دستور b'):

اگر در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ضریب x یعنی b عددی زوج باشد دستوره‌ای حل معادله را می‌توان ساده کرد. بدین ترتیب که با اختیار $b = 2b'$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a}$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$


مثال ۱۲: معادله‌ی $3x^2 - 4x + 1 = 0$ را حل کنید.حل: 

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 3 \times 1}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$x_1 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۳: معادله‌ی $5x^2 + 6x - 8 = 0$ را حل کنید.

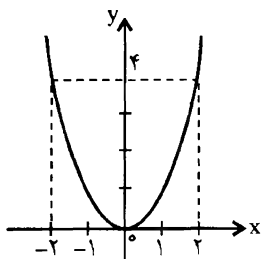
حل: 

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 5 \times (-8)}}{5} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{5} = \frac{-3 \pm 7}{5}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{5} = -2$$

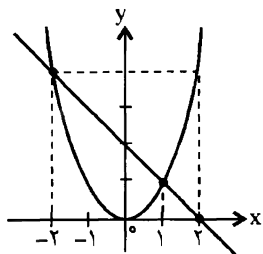
۴- روش هندسی: نمودار رابطه‌ی $y = x^2$ که آن را سهمی می‌نامیم به صورت زیر است. خط تقارن این سهمی محور عرض و رأس سهمی مبدأ مختصات می‌باشد.




معادله‌ی $x^2 + x - 2 = 0$ را در نظر بگیرید. می‌توان گفت جواب‌های این معادله طول نقاط برخورد سهمی $y = x^2$ و خط $y = -x + 2$ می‌باشد.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -x + 2$$

همان‌طور که روی نمودار ملاحظه می‌کنیم خط $y = -x + 2$ سهمی $y = x^2$ در نقاط $(1, 1)$ و $(-2, 4)$ قطع می‌کند که طول این نقاط یعنی ۱ و ۲- جواب‌های معادله‌ی $x^2 + x - 2 = 0$ می‌باشند.

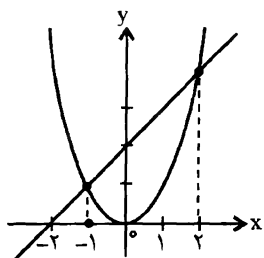


مثال ۱۴: معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ را حل کنید.

حل: 

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2$$

جواب‌های معادله طول نقاط برخورد سهمی $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ می‌باشد.



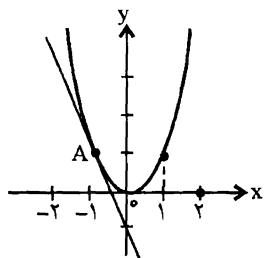
خط $y = x + 2$ سهمی $y = x^2$ را در دو نقطه‌ی $(-1, 1)$ و $(2, 4)$ قطع می‌کند که طول این نقاط یعنی -1 و 2 جواب‌های معادله می‌باشند. در این مثال مبین معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ مثبت می‌باشد که خط و سهمی در دو نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند.

مثال ۱۵: معادله‌ی $x^2 + 2x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -2x - 1$$

جواب‌های معادله نقاط برخورد سهمی $y = x^2$ و خط $y = -2x - 1$ می‌باشند.

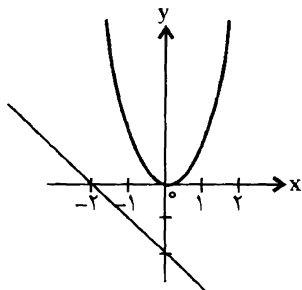


خط $y = -2x - 1$ در نقطه‌ی $A(-1, 1)$ بر سهمی $y = x^2$ مماس است. طول نقطه‌ی A یعنی عدد -1 جواب معادله‌ی $x^2 + 2x + 1 = 0$ است. در این مثال مبین معادله‌ی $x^2 + 2x + 1 = 0$ برابر صفر است که خط در یک نقطه بر سهمی مماس می‌شود.

مثال ۱۶: معادله‌ی $x^2 + x + 2 = 0$ را حل کنید.

حل:


$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 2$$



جواب‌های معادله طول نقاط برخورد سهمی $y = x^2$ و خط $y = -x - 2$ می‌باشد.

خط $y = -x - 2$ سهمی $y = x^2$ را قطع نمی‌کند. بنابراین معادله‌ی $x^2 + x + 2 = 0$ جواب ندارد. در این مثال مبین معادله‌ی $x^2 + x + 2 = 0$ منفی می‌باشد که خط و سهمی هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

مثال ۱۷: مقدار m را چنان تعیین کنید که سهمی $y = x^2$ و خط $y = mx + 1$ دو نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

حل: 


$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = mx + 1 \Rightarrow x^2 - mx - 1 = 0$$

برای این که سهمی $y = x^2$ و خط $y = mx + 1$ دو نقطه‌ی مشترک داشته باشند باید مبین معادله‌ی $x^2 - mx - 1$ مثبت باشد.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) > 0 \Rightarrow m^2 + 4 > 0$$

این نامساوی همواره برقرار است. یعنی به ازای هر مقدار m خط و سهمی دو نقطه‌ی مشترک دارند.

مثال ۱۸: مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $y = mx - 9$ بر سهمی $y = x^2$ مماس باشد.

حل: 

$$\begin{cases} y = mx - 9 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = mx - 9 \Rightarrow x^2 - mx + 9 = 0$$

برای این که خط بر سهمی مماس باشد باید مبین معادله‌ی $x^2 - mx + 9$ برابر صفر باشد.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0 \Rightarrow m^2 - 36 = 0 \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

مثال ۱۹: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دارای ریشه‌ی مضاعف باشد. سپس

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$$

ریشه‌ی مضاعف را حساب کنید.

حل: 

$$\Delta' = b'^2 - ac = (3m+1)^2 - (m+3)^2 = 9m^2 + 6m + 1 - m^2 - 6m - 9 = 0$$

$$8m^2 - 8 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m = 1 \Rightarrow x = \frac{-2(3m+1)}{2(m+3)} = \frac{-(3 \times 1 + 1)}{1+3} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$m = -1 \Rightarrow x = \frac{-2(3m+1)}{2(m+3)} = \frac{-(3 \times (-1) + 1)}{-1+3} = \frac{2}{2} = 1$$

مثال ۲۰: مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی زیر ۲ باشد. سپس ریشه‌ی دیگر را حساب کنید.

$$(m+1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0$$

حل: 

$$(m+1) \times 2^2 - 2m \times 2 + m - 5 = 0 \Rightarrow 4m + 4 - 4m + m - 5 = 0$$

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$


$$m = 1 \Rightarrow (1+1)x^2 - 2 \times 1x + 1 - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

مثال ۲۱: به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی زیر دارای دو ریشه‌ی حقیقی است؟

$$(4m+1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0$$

حل: 


$$\Delta' > 0 \Rightarrow (-2m)^2 - (4m+1)(m-3) > 0$$

$$4m^2 - 4m^2 + 12m - m + 3 > 0$$

$$11m > -3 \Rightarrow m > -\frac{3}{11}$$

مثال ۲۲: حدود m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر جواب نداشته باشد.

$$mx^2 - 2mx + (m+1) = 0$$


حل: 

$$\Delta' < 0 \Rightarrow m^2 - m(m+1) < 0 \Rightarrow m^2 - m^2 - m < 0$$

$$-m < 0 \Rightarrow m > 0$$

مثال ۲۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$$


حل: 

$$\frac{x^2 + x - 2x + 2}{x^2 - 1} = \frac{8}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - x + 2 = 8$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

مثال ۲۴: معادله‌ی $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-3}{x-1} + 2 = 0$ را حل کنید.

حل: 

$$\frac{x-1}{x-3} = y \Rightarrow \frac{x-3}{x-1} = \frac{1}{y}$$


$$y + \frac{1}{y} + 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 1 + 2y = 0 \Rightarrow (y+1)^2 = 0$$

$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\frac{x-1}{x-3} = -1 \Rightarrow x-1 = -x+3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

مثال ۲۵: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} + \frac{3x}{x^2 - 2x + 2} = 4$$

حل: 


$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = y \Rightarrow y + \frac{3}{y} = 4 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 3}}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 2$$

مثال ۲۶: معادله $x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}$ را حل کنید.

حل: 

$$x^2 + x = y \Rightarrow y + 1 = \frac{42}{y} \Rightarrow y^2 + y - 42 = 0$$


$$(y + 7)(y - 6) = 0 \Rightarrow y = -7 \text{ یا } y = 6$$

$$x^2 + x = -7 \Rightarrow x^2 + x + 7 = 0 \text{ جواب ندارد}$$

$$x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -3$$

مثال ۲۷: مقدار a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو جواب برابر داشته باشد.

$$x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 2 = 0$$

حل: 


$$\Delta = 0 \Rightarrow (3a + 1)^2 - 4(2a^2 + 2) = 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = 0$$

$$(a - 1)(a + 7) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -7$$

مثال ۲۸: در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ ثابت کنید یکی از

ریشه‌های معادله یک و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

حل: 

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(ax + a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ ax + a + b = 0 \Rightarrow ax = -a - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

مثال ۲۹: در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ ثابت کنید یکی از ریشه‌های

معادله -1 و ریشه‌ی دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

حل: 


$$a + c = b$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + b - a = a(x^2 - 1) + b(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(ax - a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ ax - a + b = 0 \Rightarrow ax = a - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$$


مثال ۳۰: جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 19x + 18 = 0$ را به دست آورید.

حل: 

$$1 + (-19) + 18 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{18}{1} = 18$$

مثال ۳۱: جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 135x - 136 = 0$ را به دست آورید.

حل: 

$$1 + (-136) = -135$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{-136}{1} = 136$$

☆ تجزیه‌ی سه‌جمله‌ی درجه‌ی دوم

قضیه: اولاً: اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز x' و x'' باشد،

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'') \quad \text{آن‌گاه:}$$

ثانیاً: اگر معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی مضاعف x' باشد آن‌گاه:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$$

برهان: اولاً: فرض می‌کنیم $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ که در این صورت معادله‌ی

$$ax^2 + bx + c = 0$$
 دارای دو ریشه‌ی x' و x'' می‌باشد که:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + b + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 - (x' + x'')x + x'x'' \right] \\
 &= a \left[x^2 - xx' - xx'' + x'x'' \right] = a \left[x(x - x') - x''(x - x') \right] \\
 &= a(x - x')(x - x'')
 \end{aligned}$$


ثانیاً: فرض می‌کنیم $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. در نتیجه $c = \frac{b^2}{4a}$ و از آن جا:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \\
 &= a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 = a(x - x')^2
 \end{aligned}$$

مثال ۳۳: عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $4x^2 - 16x + 15$

ب) $9x^2 - 6x + 1$

حل: 

الف) $4x^2 - 16x + 15 = 0$

$$\Delta' = (-8)^2 - 4 \times 15 = 4 > 0$$

$$x' = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{8 \pm 2}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x'' = \frac{8 - \sqrt{4}}{4} = \frac{8 - 2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 4 \left(x - \frac{5}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) = (2x - 5)(2x - 3)$$

ب) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta' = (-3)^2 - 9 \times 1 = 0 \Rightarrow x' = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 9 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 = (3x - 1)^2$$

نکته: برای این که یک سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم به حاصل ضرب چند عبارت با ضرایب صحیح تجزیه شود لازم است که مبین معادله مجذور کامل باشد.

معادله‌ی دومجذوری: معادله‌ی درجه‌ی چهارمی که بتوان آن را به صورت زیر نوشت معادله‌ی دومجذوری نامیده می‌شود.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$$

ملاحظه می‌شود که در این معادله ضرایب جملات درجه‌ی سوم و درجه‌ی اول صفرند.

برای حل معادله‌ی فوق x^2 را مساوی y می‌گیریم ($x^2 = y$)، معمولاً y را مجهول معاون می‌نامند. با فرض $x^2 = y$ معادله‌ی (۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود که آن را معادله‌ی حلال می‌نامند.

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (2)$$

چون y نباید منفی باشد به ازای هر ریشه مثبت از معادله‌ی (۲) دو ریشه‌ی قرینه برای معادله‌ی (۱) به دست می‌آید. اگر معادله‌ی (۲) ریشه‌ی صفر داشته باشد معادله‌ی (۱) نیز ریشه‌ی صفر خواهد داشت. اگر معادله‌ی حلال ریشه‌ی مثبت نداشته باشد معادله‌ی دومجذوری ریشه نخواهد داشت.

مثال ۳۳: معادله‌ی $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ را حل کنید.

$$x^2 = y \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \quad \text{حل:}$$

معادله حلال دو ریشه‌ی مثبت دارد. بنابراین معادله‌ی دومجذوری چهار ریشه دارد.

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$y' = \frac{5+3}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y'' = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

مثال ۳۴: معادله‌ی $2x^4 - 13x^2 - 45 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^2 = y \Rightarrow 2y^2 - 13y - 45 = 0$$


با توجه به این که $\frac{c}{a}$ معادله‌ی حلال منفی است می‌توان گفت معادله حلال یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد. بنابراین معادله‌ی دوم‌جذوری فقط دو ریشه دارد.

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 2 \times (-45)}}{4} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 360}}{4} = \frac{13 \pm \sqrt{529}}{4} = \frac{13 \pm 23}{4}$$

$$y' = \frac{13 + 23}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$y'' = \frac{13 - 23}{4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{معادله اولیه ریشه حقیقی ندارد}$$

مثال ۳۵: معادله‌ی $5x^4 + 80x^2 + 32 = 0$ را حل کنید.

 حل:

$$x^2 = y \Rightarrow 5y^2 + 80y + 32 = 0$$

این معادله دارای دو ریشه است. زیرا $1440 = 1600 - 160 = \Delta$ مثبت است و چون

حاصل ضرب دو ریشه $\frac{32}{5}$ و مجموع دو ریشه $-\frac{80}{5}$ است می‌توان گفت هر دو ریشه‌ی معادله

حلال منفی است. لذا معادله‌ی دوم‌جذوری ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۳۶: چند نفر ۱۰۸۰۰ تومان بدهکارند که باید به طور مساوی آن را بپردازند. دو نفر

قادر به پرداخت سهم خود نمی‌باشند. به ناچار بقیه هر کدام باید ۹۰۰ تومان اضافه

بپردازند. تعداد نفرات را به دست آورید.

 حل:

فرض می‌کنیم تعداد نفرات x باشد.

$$\frac{10800}{x-2} - \frac{10800}{x} = 900$$


$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{900}{10800} \Rightarrow \frac{x - x + 2}{x^2 - 2x} = \frac{1}{12}$$

$$x^2 - 2x = 24 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{1} = 1 \pm \sqrt{25} = 1 \pm 5$$

$$x = 1 + 5 = 6 \quad \text{یا} \quad x = 1 - 5 = -4 \quad \text{غقی}$$

مثال ۳۷: حوضی دارای دو شیر A و B می‌باشد. مدت پر شدن حوض به وسیله‌ی شیر A ، ۲۲ دقیقه بیش‌تر از مدت پر شدن آن به وسیله‌ی شیر B است. اگر هر دو شیر A و B با هم باز باشند حوض در مدت یک ساعت پر می‌شود. معین کنید هریک از شیرها به تنهایی حوض را در چه مدتی پر می‌کنند؟

 **حل:**

فرض می‌کنیم شیر B حوض را در x دقیقه پر کند.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+22} = \frac{1}{60}$$

$$\frac{x+22+x}{x^2+22x} = \frac{1}{60} \Rightarrow x^2+22x = 120x+1320$$

$$x^2-98x-1320=0 \Rightarrow x = \frac{49 \pm \sqrt{49^2+1320}}{1} = 49 \pm \sqrt{3721}$$

$$x_1 = 49 + 61 = 110$$

$$x_2 = 49 - 61 = -12 \text{ غق}$$

بنابراین شیر B حوض را در ۱۱۰ دقیقه و شیر A آن را در ۱۳۲ دقیقه پر می‌کنند.

قضیه: اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز یا مساوی

باشد، ثابت کنید مجموع آن‌ها مساوی $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها مساوی $\frac{c}{a}$ خواهد بود.

برهان: اولاً: اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد، مبین آن

یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ مثبت است و داریم:

حل:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ثانیاً: اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، آن‌گاه: $b^2 = 4ac$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b}{2a} \right) \times \left(\frac{-b}{2a} \right) = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مثال ۳۸: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 2x - 1 = 0$ چیست؟

✎ حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$$

☆ محاسبه‌ی عبارتی که بر حسب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم متقارن هستند

عبارتی را بر حسب x_1 و x_2 متقارن گویند در صورتی که در آن عبارت با تبدیل x_1 به x_2 و

x_2 به x_1 تغییری حاصل نشود. مثلاً عبارات $x_1 + x_2$ و $x_1^2 + x_2^2$ و $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ متقارن


هستند. ثابت می‌شود هر عبارتی را که بر حسب x_1 و x_2 متقارن باشد می‌توان بر حسب

$S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ نوشت.

مثال ۳۹: اگر S و P مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و x_1

و x_2 ریشه‌های معادله باشند عبارات $x_1^3 + x_2^3$ و $x_1^2 + x_2^2$ را بر حسب S و P

بنویسید.

حل: 

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$


$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

مثال ۴۰: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 3 = 0$ باشند مقدار عبارات زیر را حساب کنید. (بدون حل معادله).

الف) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

ب) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

ج) $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

حل: 

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times -\frac{3}{2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{9}{4} + 3}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} &= \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{\frac{27}{8} + \frac{27}{4}}{-\frac{27}{8}} = \frac{\frac{81}{4}}{-\frac{27}{8}} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 &= x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 6x_2 + 9 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) - 6(x_1 + x_2) + 18 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 18 \end{aligned}$$

$$= S^2 - 2P - 6S + 18 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 18$$

$$= \frac{9}{4} + 3 - 9 + 18 = \frac{9}{4} + 12 = \frac{57}{4}$$

مثال ۱۴: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 4 = 0$ باشند بدون حل معادله حاصل $x_1^4 + x_2^4$ را حساب کنید.

حل: 

$$S = x_1 + x_2 = 3 \qquad P = x_1 x_2 = 4$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right]^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = (9 - 8)^2 - 2 \times 16 = 1 - 32 = -31$$

☆ بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

در بعضی موارد لازم است بدون محاسبه‌ی ریشه‌ها، در این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه است یا خیر و یا این‌که علامت ریشه‌های آن مثبت است یا منفی تحقیق کنیم. اکنون به بررسی این مطلب می‌پردازیم.

معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید.

اولاً: اگر $\frac{c}{a} < 0$ در این صورت a و c مختلف‌العلامه هستند و معادله دارای دو ریشه‌ی متمایز است. این دو ریشه مختلف‌العلامه هستند. زیرا حاصل‌ضربشان منفی است.

ثانیاً: اگر $\frac{c}{a} = 0$ (در این حالت یکی از ریشه‌ها صفر است و ریشه‌ی دیگر مساوی


$-\frac{b}{a}$ می‌باشد).

ثالثاً: اگر $\frac{c}{a} > 0$ در این حالت چون مشخص نیست که معادله ریشه دارد یا خیر، باید Δ را

تشکیل داد. اگر $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

اگر $\Delta \geq 0$ معادله دارای دو ریشه است که چون حاصل‌ضربشان مثبت است هم‌علامت می‌باشند و علامت مشترک آن‌ها علامت $\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.


مثال ۴۲: بدون حل کردن معادله $x^2 + 57x + 100 = 0$ در وجود و علامت ریشه‌های معادله بحث کنید.

 حل:

چون $\frac{c}{a} = -\frac{57}{100}$ عددی منفی است پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. همچنین

چون $-\frac{b}{a} = \frac{1}{100}$ عددی مثبت است. پس ریشه‌ای که قدرمطلقش بزرگ‌تر است مثبت است.

مثال ۴۳: بدون حل کردن معادله‌ی $5x^2 + 35x + 2 = 0$ در وجود و علامت ریشه‌های معادله بحث کنید.

 حل:

چون در این معادله $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$ عددی مثبت است نمی‌توانیم بگوییم معادله ریشه دارد یا خیر و باید مبین معادله را تشکیل دهیم.


$$\Delta = 35^2 - 4 \times 5 \times 2 = 1185$$

چون مبین معادله مثبت است معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد و چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت

است می‌توان گفت دو ریشه هم‌علامتند و چون $-\frac{b}{a} = -7$ یعنی مجموع ریشه‌ها منفی است می‌توان گفت معادله دو ریشه‌ی منفی دارد.

مثال ۴۴: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی معکوس داشته باشد.

$$mx^2 + 13x + 2m - 1 = 0$$

 حل:


برای این‌که معادله دو ریشه‌ی معکوس داشته باشد باید مبین معادله مثبت و ضرب ریشه‌ها برابر یک باشد.

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2m-1}{m} = 1 \Rightarrow 2m-1 = m \Rightarrow m = 1$$

به ازای $m = 1$ معادله به صورت $x^2 + 13x + 1 = 0$ درمی آید که مبین آن مثبت است.

مثال ۴۵: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد.

$$x^2 - (m+5)x + 2m = 0$$

حل: 


برای این که معادله دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد باید مبین معادله مثبت و مجموع ریشه‌های معادله صفر باشد.

$$\frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \frac{m+5}{1} = 0 \Rightarrow m = -5$$

به ازای $m = -5$ معادله به صورت $x^2 - 10 = 0$ درمی آید که مبین آن مثبت است.

مثال ۴۶: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر یک ریشه‌ی صفر داشته باشد.


$$(m+1)x^2 - mx + (2m-6) = 0$$

حل: 

$$\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \frac{2m-6}{m+1} = 0 \Rightarrow 2m-6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

مثال ۴۷: حدود t را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی منفی داشته باشد.

$$x^2 + 4x + t + 2 = 0$$

حل: 

$$\Delta' > 0 \Rightarrow 4 - (t+2) > 0 \Rightarrow 2 - t > 0 \Rightarrow t < 2$$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow t + 2 > 0 \Rightarrow t > -2$$


$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -4 < 0$$

بنابراین برای این که معادله دو ریشه‌ی منفی داشته باشد باید $-2 < t < 2$.

مثال ۴۸: مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی زیر رابطه‌ی

$$x_1^2 + x_2^2 = 10$$

$$x^2 - (m-1)x + \frac{m+1}{2} = 0$$

حل: 

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$


$$(m-1)^2 - 2\left(\frac{m+1}{2}\right) = 10 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - m - 1 = 10$$

$$m^2 - 3m - 10 = 0 \Rightarrow (m-5)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ یا } m = -2$$

مثال ۴۹: مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$$

رابطه‌ی $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$ برقرار باشد.

حل: 

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \Rightarrow 4S = 7P$$


$$\Rightarrow 4 \times \frac{2(m-2)}{m} = 7 \times \frac{m-3}{m} \Rightarrow \frac{8m-16}{m} = \frac{7m-21}{m}$$

$$\Rightarrow 8m - 16 = 7m - 21 \Rightarrow \boxed{m = -5}$$

مثال ۵۰: مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی:

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$$

رابطه‌ی $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار باشد.

حل: 

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{2m-2}{m} \\ x_1 \times x_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = 3 - \frac{2m-2}{m} = \frac{3m-2m+2}{m} = \frac{m+2}{m}$$

$$x_1 = \frac{2m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = \frac{2m-2-m-2}{m} = \frac{m-4}{m}$$

$$x_1 \times x_2 = 1 \Rightarrow \frac{m-4}{m} \times \frac{m+2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = m^2$$

$$\Rightarrow -2m = 8 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

☆ تعیین دو عدد که مجموع و حاصل ضربشان معلوم است

دو عدد معلوم S و P را در نظر گرفته، می‌خواهیم دو عدد α و β را پیدا کنیم به‌طوری‌که داشته باشیم $\alpha + \beta = S$ و $\alpha \times \beta = P$.

اگر α و β با این شرایط وجود داشته باشند واضح است که می‌توان آن‌ها را ریشه‌های معادله‌ی مقابل دانست.

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

بنابراین اگر دو عدد وجود داشته باشند که مجموعشان S و حاصل ضربشان P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مثال ۵۱: دو عدد پیدا کنید که مجموعشان ۲۴ و حاصل ضربشان ۱۴۳ باشد.

 حل:

$$S = 24 \quad P = 143$$

در این جا داریم:

$$x^2 - 24x + 143 = 0$$

پس کافی است معادله‌ی درجه‌ی دوم مقابل را حل کنیم.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 143}}{1}$$

$$x_1 = 12 + 1 = 13$$


$$x_2 = 12 - 1 = 11$$

☆ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن دو عدد معلوم باشند

اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی α و β باشند، آن معادله هم‌ارز با معادله‌ی $(x - \alpha)(x - \beta)$ است که این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

مثال ۵۲: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ۵ و -۳ باشند.

 حل:

$$S = 5 + (-3) = 2$$

$$P = 5 \times (-3) = -15$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

مثال ۵۳: معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض است. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد.

 **حل:**

راه اول: اگر ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x_1 و x_2 بنامیم برای معادله‌ی جدید داریم:

$$S = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$P = 2x_1 \times 2x_2 = 4x_1x_2 = \frac{4c}{a}$$

بنابراین معادله‌ی جدید به صورت زیر نوشته می‌شود.


$$x^2 - \left(\frac{-2b}{a}\right)x + \frac{4c}{a} = 0 \Rightarrow ax^2 + 2bx + 4c = 0.$$

راه دوم: روش دیگر برای یافتن معادله فوق این است که رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی قدیم و معادله‌ی جدید را به صورت $y = 2x$ در نظر گرفته و از آن x را برحسب y به دست آورده و در معادله‌ی قدیم قرار دهیم.

$$x = \frac{y}{2} \Rightarrow a\left(\frac{y}{2}\right)^2 + b\left(\frac{y}{2}\right) + c = 0.$$

$$\Rightarrow ay^2 + 2by + 4c = 0.$$

مثال ۵۴: معادله‌ی درجه‌ی دومی را بنویسید که ریشه‌هایش یک واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.

 **حل:**

روش اول: اگر ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x_1 و x_2 بنامیم برای معادله‌ی جدید خواهیم داشت:

$$S = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = x_1 + x_2 + 2 = \frac{-b}{a} + 2 = \frac{2a - b}{a}$$

$$P = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = \frac{c}{a} + \left(\frac{-b}{a}\right) + 1 = \frac{c - b + a}{a}$$

$$x^2 - \left(\frac{2a-b}{a} \right)x + \frac{c-b+a}{a} = 0 \Rightarrow ax^2 - (2a-b)x + (c-b+a) = 0$$

$$y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$$

روش دوم:

$$a(y-1)^2 + b(y-1) + c = 0 \Rightarrow ay^2 - 2ay + a + by - b + c = 0$$

$$ay^2 - (2a-b)y + (a-b+c) = 0$$

مثال ۵۵: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های

معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند.حل: 

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$P = \frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$$

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$$

ملاحظه می‌شود جای a و c عوض شده است.مثال ۵۶: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$ax^2 + bx + 1 = 0$$
 ریشه‌ی مضاعفی برابر یک داشته باشد.

حل: 

$$\begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a \end{cases}$$


$$b^2 - 4a = 0 \Rightarrow (-2a)^2 - 4a = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a = 0$$

$$4a(a-1) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a-1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$b = -2a = -2 \times 1 = -2$$

مثال ۵۷: اگر a ، b و c اعداد گویا باشند ثابت کنید ریشه‌های معادله‌ی زیر گویا هستند.


$$(a - b + c)x^2 + 2cx - (a - b - c) = 0$$

 **حل:**

کافی است نشان دهیم معادله مجذور کامل است.

$$\Delta' = c^2 + (a - b + c)(a - b - c) = c^2 + (a - b)^2 - c^2 = (a - b)^2$$

مثال ۵۸: ثابت کنید معادله‌ی $\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} = 1$ همواره دو ریشه دارد. ($a \neq b$).

 **حل:**

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} = 1 \Rightarrow x - b + 2x - 2a = (x - a)(x - b)$$

$$3x - b - 2a = x^2 - (a+b)x + ab \Rightarrow x^2 - (a+b+3)x + ab + b + 2a = 0$$

$$\Delta = (a+b+3)^2 - 4(ab + b + 2a)$$

$$= a^2 + b^2 + 9 + 2ab + 6a + 6b - 4ab - 4b - 8a = a^2 + b^2 + 9 - 2ab - 2a + 2b$$

$$= a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b + 8 = (a - b - 1)^2 + 8 > 0$$

مبین معادله همواره مثبت است. لذا معادله‌ی فوق همواره دو ریشه دارد.

مثال ۵۹: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله‌ی

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ باشد. (بدون حل معادله)}$$

 **حل:**

اگر ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x_1 و x_2 بنامیم برای معادله‌ی جدید خواهیم داشت.


$$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \times 6 = 25 - 12 = 13$$

$$P = x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 = 6^2 = 36$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

مثال ۶۰: α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - cx + d = 0$ و ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی

$$x^2 - ax + b = 0 \text{ است. ثابت کنید: } ac = 2(b + d)$$

حل: 

$$\alpha\beta = d$$

$$\alpha = \frac{a}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2\alpha \\ c = \alpha + \beta \end{array}$$

$$ac = 2\alpha(\alpha + \beta) \Rightarrow ac = 2(\alpha^2 + \alpha\beta)$$

$$\alpha \times \alpha = b \Rightarrow \alpha^2 = b \Rightarrow ac = 2(b + d)$$

☆ معادله‌های معکوسه

به معادله‌ای معکوسه گوئیم که اگر α یک ریشه‌ی آن باشد $\frac{1}{\alpha}$ یا $-\frac{1}{\alpha}$ هم ریشه‌ی معادله باشد. که در صورت اول معادله را معکوسه‌ی مثبت و در صورت دوم آن را معکوسه‌ی منفی

می‌نامند. به عبارت دیگر معادله معکوسه‌ی مثبت معادله‌ای است که با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ به

خودش تبدیل شود و معادله‌ی معکوسه‌ی منفی معادله‌ای است که با تبدیل x به $-\frac{1}{x}$ به

خودش تبدیل شود. به عنوان مثال معادله‌ی $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ معادله‌ی

معکوسه‌ی مثبت و معادله‌ی $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ معادله‌ی معکوسه‌ی منفی است. از این تعریف نتیجه‌های زیر مستقیماً به دست می‌آید:

(۱) معادله‌ی معکوسه‌ی منفی نمی‌تواند از درجه‌ی فرد باشد زیرا مثلاً برای این‌که معادله‌ی

درجه‌ی سوم (۱) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ معکوسه‌ی منفی باشد باید با تبدیل x به

$$-\frac{1}{x} \text{ تغییر نکند. } x \text{ را به } -\frac{1}{x} \text{ تبدیل می‌کنیم:}$$

$$-\frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x} + d = 0 \Rightarrow dx^3 - cx^2 + bx - a = 0 \quad (2)$$

برای این‌که معادله‌های (۱) و (۲) هم‌ارز باشند باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{d} = -\frac{d}{a} \Rightarrow a^2 = -d^2$$

که غیرممکن است.

(۲) اگر معادله‌ی معکوسه‌ی مثبت از درجه‌ی فرد باشد، حتماً ریشه‌ای مساوی ۱ یا -۱ دارد.

زیرا این دو عدد تنها اعدادی هستند که باعکس خود برابرند.

بنابراین سمت چپ معادله‌ی معکوسه‌ی مثبت وقتی از درجه‌ی فرد باشد بر $x - 1$ یا $x + 1$ قابل قسمت است که پس از تقسیم به معادله‌ی معکوسه از درجه‌ی زوج خواهیم رسید. با این مقدمه روشن می‌شود که برای بحث در حل معادلات معکوسه کافی است به معادلات معکوسه از درجه‌ی زوج بپردازیم.

معادله‌ی زیر را که از درجه‌ی $2n$ است در نظر می‌گیریم:

$$ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} + \dots + fx^n + \dots + mx^2 + nx + p = 0 \quad (1)$$

برای این که این معادله معکوسه‌ی مثبت باشد باید با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ تغییر نکند. با این تبدیل

به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$px^{2n} + nx^{2n-1} + mx^{2n-2} + \dots + fx^n + \dots + cx^2 + bx + a = 0 \quad (2)$$

برای این که معادله‌های (۱) و (۲) هم ارز باشند باید ضرایب‌های متناسبی داشته باشند. یعنی:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{n} = \frac{c}{m} = \dots = \frac{f}{f} = \dots = \frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{p}{a}$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$a = p, \quad b = n, \quad c = m, \quad \dots$$

یعنی برای این که معادله‌ای معکوسه‌ی مثبت باشد باید ضرایب‌های جملات متساوی‌الافاصله از دو طرف برابر باشند.

به همین ترتیب می‌توان گفت در معادله‌ی معکوسه‌ی منفی، وقتی بزرگ‌ترین توان مضربی از ۴ باشد ضرایب توان‌های زوج از دو طرف با هم مساوی و ضرایب توان‌های فرد از دو طرف قرینه‌ی یکدیگرند و وقتی بزرگ‌ترین توان مضربی از ۴ نباشد (یعنی در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌اش ۲ شود) ضرایب توان‌های زوج از دو طرف قرینه‌ی یکدیگر و ضرایب توان‌های فرد از دو طرف مساوی یکدیگرند.

در حل معادلات معکوسه‌ی مثبت $x + \frac{1}{x}$ و در معادلات معکوسه‌ی منفی $x - \frac{1}{x}$ به عنوان مجهول کمکی در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۶۱: معادله‌ی $2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر x^2 که مخالف صفر است تقسیم می‌کنیم.

$$2x^2 - 13x + 24 - \frac{13}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0 \quad x + \frac{1}{x} = y$$

$$2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0.$$


$$2(y^2 - 2) - 13y + 24 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 13y + 20 = 0.$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \times 2 \times 20}}{4} = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{13+3}{4} = 4 \quad y_2 = \frac{13-3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$y = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$y = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$$

مثال ۶۲: معادله $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ را حل کنید.حل: 

$$3(x^3 - 1) - 13x(x - 1) = 0.$$

$$3(x - 1)(x^2 + x + 1) - 13x(x - 1) = 0.$$

$$(x - 1)(3x^2 + 3x + 3 - 13x) = 0.$$


$$(x - 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{5+4}{3} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال ۶۳: معادله‌ی $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: 

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$


$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \qquad x - \frac{1}{x} = y$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 4$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y_2 = 4 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

مثال ۶۴: معادله‌ی $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ را حل کنید.

حل: 

دو طرف معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم.

$$\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$$

با فرض $2x + \frac{1}{x} = y$ خواهیم داشت:


$$(y - 3)(y + 5) = 9 \Rightarrow y^2 + 2y - 15 = 9 \Rightarrow y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 + 24} = -1 \pm 5 \Rightarrow y_1 = 4, y_2 = -6$$

$$2x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$2x + \frac{1}{x} = -6 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

مثال ۶۵: معادله‌ی $(6-x)^4 + (8-x)^4 = 16$ را حل کنید.

حل: 

$$y = \frac{6-x+8-x}{2} = 7-x \Rightarrow x = 7-y$$

$$(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$$

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 16$$

$$2y^4 + 12y^2 - 14 = 0 \Rightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \text{ یا } y^2 = -7$$

$$\Rightarrow y = \pm 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 7-1 = 6$$

$$y = -1 \Rightarrow x = 7+1 = 8$$

☆ ریشه‌های گویای معادلات جبری

قضیه: برای این‌که کسر ساده‌نشده‌ی $\frac{p}{q}$ که در آن $q \neq 0$ ، ریشه‌ی معادله‌ی

$$p_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

باشد، باید عدد p مقسوم‌علیه مقدار ثابت a_0 و عدد q مقسوم‌علیه ضریب بزرگ‌ترین درجه، یعنی a_n باشد.

نتیجه: اگر در معادله‌ی با ضرایب صحیح، ضریب بزرگ‌ترین درجه، یعنی a_n برابر واحد باشد و اگر معادله ریشه‌های گویا داشته باشد، این ریشه‌های گویا اعداد صحیح‌اند که در ضمن، جزو مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت a_0 هستند.

هر معادله با ضرایب گویا را می‌توان با ضرب کردن طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها، به معادله‌ای با ضرایب صحیح تبدیل کرد.


در معادله‌ی $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ که ضرایب آن اعداد صحیح هستند هر ریشه‌ی صحیح معادله یک مقسوم‌علیه a_0 است زیرا اگر x_0 یک ریشه‌ی صحیح معادله‌ی فوق باشد خواهیم داشت:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = -x_0 (a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \dots + a_1) = 0$$

با توجه به این‌که حاصل پیرانتز عددی صحیح است a_0 بر x_0 بخش‌پذیر است.

مثال ۶۶: معادله‌ی $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$ را حل کنید.

حل: 


چون ضرایب این معادله اعداد صحیح‌اند، اگر این معادله ریشه‌ی صحیح داشته باشد آن ریشه باید ± 1 یا ± 5 باشد. ملاحظه می‌کنیم عدد یک در معادله صدق می‌کند. بنابراین عبارت $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است.

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + x - 5)$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x^2 + 4x + 5) = (x - 1)^2 (x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{یا} \\ x^2 + 4x + 5 = 0 \text{ ریشه‌ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

مثال ۶۷: معادله‌ی $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ را حل کنید.

حل: 

چون معادله، معادله‌ای متقارن از درجه‌ی فرد است بنابراین $x = -1$ یکی از ریشه‌های آن است.

$$2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2) = 0$$

اکنون به حل معادله‌ی متقارن درجه‌ی چهارم، که از این‌جا به‌دست می‌آید می‌پردازیم:

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$$

$$2x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0$$

$$2y^2 + y - 10 = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = \frac{-5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-5}{2} \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = \frac{-1}{2}$$

تمرین‌های فصل دوازدهم

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $4x^2 - 8x = 0$

ب) $3x^2 - 5 = 70$

ج) $(x+2)(x+3) = 6$

د) $(x+1)^2 - 2x - 2 = 0$

هـ) $2x^2 - 8 = 0$

و) $(2x-1)^2 - (x-1)^2 = 0$

۲. معادلات زیر را با مربع کامل‌سازی حل کنید.

الف) $x^2 - 12x + 35 = 0$

ب) $2x^2 - 5x - 12 = 0$

ج) $5x^2 + 6x - 8 = 0$

د) $x^2 - 6x + 9 = 0$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

ب) $7x^2 - 5x - 2 = 0$

ج) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

د) $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

هـ) $(5x-3)(x-5) = (2x+5)^2 + 9$

و) $(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) + 2 = 0$

ز) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

ح) $x + \frac{1}{x-3} = 5$

ط) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$

ی) $\frac{5x-1}{x+1} = \frac{3x}{2}$

ک) $\frac{3x-1}{4x+7} = 1 - \frac{6}{x+7}$

ل) $\frac{x-5}{x-7} + \frac{x-7}{x-5} + 2 = 0$

ن) $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} + 2 = 0$

م) $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x^2-2x}$

۴. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

ب) $x^2 - 1379x + 1378 = 0$

ج) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

د) $x^4 - 97x^2 - 1296 = 0$

و) $(x+1)^4 - 13(x+1)^2 + 36 = 0$

ز) $(x+1)^3 - (x-2)^3 = 63$

ح) $(x+1)^6 + 8 = 7(x+1)^3$

ط) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120$

ی) $7(x + \frac{1}{x}) - 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) = 9$

ک) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$

ل) $(x^2 - 4x + 5)^2 - (x-1)(x-3) = 4$

م) $x^2 - 4x + \frac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$

۵. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$ ب) $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

ج) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}$

د) $(x+2)^4 + (x+5)^4 = 17$

هـ) $(x+1)^6 + (x+5)^6 = 730$

و) $x^2(x+1)^2 + x^2 = 8(x+1)^2$

ز) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \frac{40}{9}$

۶. به ازای چه مقداری از m خط $y = mx - 9$ بر سهمی $y = x^2$ مماس می‌شود؟۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$(m+2)x^2 - 2mx + 1 = 0$$

۸. معادله‌ی زیر به ازای چه مقادیری از a دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

$$(\Delta a - 1)x^2 - (\Delta a + 2)x + 3a - 2 = 0$$

۹. مقدار m را چنان تعیین کنید که عدد ۳ یکی از ریشه‌های معادله‌ی زیر باشد. سپس

$$x^2 + mx + 3 = 0$$

ریشه‌ی دیگر را حساب کنید.

۱۰. مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی برابر داشته باشد و سپس ریشه‌ی مضاعف را حساب کنید.

$$x^2 - (m+1)x + 1 = 0$$

۱۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که مبین معادله‌ی زیر برابر ۲۵ باشد.

$$mx^2 + 3x - m = 0$$

۱۲. به ازای چه مقادیری از m عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$x^2 + m(m-1)x + 36$$

۱۳. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{(3-x)^3 + (4+x)^3}{(3-x)^2 + (4+x)^2} = 7$$

۱۴. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی زیر صفر باشند.

$$x^2 + (a^2 + 2b + 2)x + (2b - 6a) = 0$$

۱۵. حدود m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی مختلف داشته باشد.

$$(m-1)x^2 - 2mx + (m+3) = 0$$

۱۶. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 89 \\ xy = 40 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 + y^2 = 225 \end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 106 \end{cases}$$

د)
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + xy + y^2 = 61 \end{cases}$$

هـ)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ xy = 12 \end{cases}$$

و)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

۱۷. عددی دورقمی پیدا کنید که مجموع مربعات ارقام آن مساوی با همان عدد به اضافه‌ی حاصل ضرب ارقامش باشد و اگر ترتیب نوشتن ارقام آن عدد را تغییر دهیم عدد حاصل ۳۶ واحد از همان عدد بزرگ‌تر شود.

۱۸. شخصی چند متر پارچه به مبلغ ۶۰۰ ریال خرید. اگر با همین مبلغ ۳ متر بیش تر پارچه خریده بود هر متر پارچه ۱۰ ریال ارزان تر محسوب می شد. معین کنید او چند متر پارچه خریده است؟

۱۹. معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) (b - c)x^2 - (c - a)x + (a - b) = 0$$

$$ب) abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$$

$$ج) mx^2 - (m^2 + n)x + mn = 0$$

$$د) (m - 2n)x^2 - 2mx + m + 2n = 0 \quad (n > 0)$$

$$۲۰. معادله ی $bx^2 - (a + b^2)x + ab = 0$ را حل کنید.$$

۲۱. به ازای چه مقدار از m یکی از ریشه های معادله ی زیر صفر است؟ پس از تعیین m معادله را حل کنید.

$$۱۰x^2 - 5x + 3m^2 - 8m + 4 = 0$$

۲۲. اگر x' و x'' ریشه های معادله ی $x^2 - 3x - 10 = 0$ باشند بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$الف) x'^2 + x''^2$$

$$ب) x'^3 + x''^3$$

$$ج) 3x'^2x'' + 3x'x''^2$$

$$د) \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2}$$

۲۳. مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه های معادله ی زیر رابطه ی $x' + x'' = 2x'x''$ برقرار باشد.

$$(m - 1)x^2 - 3mx + 2m + 1 = 0$$

۲۴. مقدار m را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات ریشه های معادله ی زیر برابر ۲۵ باشد.

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

۲۵. مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه های معادله ی $x^2 - mx + 36 = 0$ رابطه ی زیر برقرار باشد و در این حالت ریشه ها را حساب کنید.

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$$

۳۴. معادله‌ی $x^2 - 19x + 9 = 0$ را در نظر گرفته و مقدار عددی عبارت $\sqrt{x'} + \sqrt{x''}$ را بدون حل معادله به دست آورید.

۳۵. مقدار m را در معادله‌ی زیر طوری پیدا کنید که مجذور تفاضل ریشه‌های آن برابر ۱۶ باشد.

$$x^2 - 2x + m = 0$$

۳۶. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار m در صورتی که تفاضل مجذورات ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - mx + 2 = 0$ مساوی $\frac{35}{9}$ باشد.

۳۷. a را چنان حساب کنید که رابطه‌ی $3x'x'' = 2x' - x''$ بین ریشه‌های معادله‌ی زیر برقرار باشد.

$$(14a - 1)x^2 - 2ax + 1 = 0$$

۳۸. ضرایب a و b را چنان تعیین کنید که تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ مساوی ۴ و تفاضل مکعبات ریشه‌ها مساوی ۲۰۸ شود.

۳۹. در معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ مقدار عددی $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ و $x_1x_2^{-2} + x_2x_1^{-2}$ را بدون حل معادله به دست آورید. ($\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$)

۴۰. m را طوری پیدا کنید که نسبت ریشه‌های معادله‌ی زیر برابر ۲ باشد.

$$9x^2 - 18mx - 8m + 16 = 0$$

۴۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از دو ریشه‌ی معادله‌ی:

$$x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 + m = 0$$

چهار واحد بزرگ‌تر از دیگری باشد.

۴۲. m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $x^3 + (m - 1)x + 6 = 0$ دارای ریشه‌ای مساوی ۳- باشد و سایر ریشه‌های معادله را پیدا کنید.

۴۳. m را چنان حساب کنید که معادله‌ی زیر دارای دو ریشه باشد که یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد.

$$(m + 2)x^2 - (7m + 23)x + 22m - 26 = 0$$

۴۴. در معادله‌ی $x^2 - ax + 4 = 0$ ، مقدار a را چنان به‌دست آورید که رابطه‌ی $x_1^2 = 2x_2$ بین دو ریشه‌ی معادله برقرار باشد.

۴۵. عدد حقیقی a را طوری پیدا کنید که در معادله‌ی زیر یکی از ریشه‌ها مجذور ریشه‌ی دیگر باشد.

$$4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$$

۴۶. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $6 + \sqrt{5}$ و $6 - \sqrt{5}$ باشند.

۴۷. مجموع دو عدد ۲۸ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۹۵ است. آن دو عدد کدامند؟

۴۸. مجموع دو عدد ۱۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۴۷ می‌باشد. آن دو عدد را به‌دست آورید.

۴۹. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که هر ریشه‌ی آن ۵ واحد بیش‌تر از هر ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 5 = 0$ باشد.

۵۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۷ و تفاضل اضلاع زاویه‌ی قائمه آن ۷ است. طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه را حساب کنید.

۵۱. اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2 - (m-1)x + n = 0$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند مقادیر m و n را به‌دست آورید.

۵۲. a و b را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله $2x^2 - (a+1)x + 1 = 0$ عکس ریشه‌های معادله $y^2 - by + b - 1 = 0$ باشند.

۵۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

۵۴. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که هریک از ریشه‌های آن از سه برابر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx - 1 = 0$ ، ۴ واحد کم‌تر باشد.

۵۵. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} x'x'' + x' + x'' - m = 0 \\ x'x'' - m(x' + x'') + 1 = 0 \end{cases}$$

۵۶. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۶ و مجموع مربعات سه ضلع آن ۴۵۰ می‌باشد. طول اضلاع مثلث را حساب کنید.

۵۷. معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۱ + \sqrt{۳}$ و $۱ - \sqrt{۳}$ باشند. سپس حاصل $(۱ + \sqrt{۳})^۶ + (۱ - \sqrt{۳})^۶$ را حساب کنید.

۵۸. بدون حل معادله‌ی $۱۶x^۲ - ۴\sqrt{۸۵}x + ۲۱ = ۰$ قدرمطلق تفاضل مکعبات ریشه‌های آن را حساب کنید.

۵۹. ثابت کنید معادله‌ی زیر به ازای هر مقدار m دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.

$$(x-۱)(x-۳) + m(x-۲)(x-۴) = ۰$$

۶۰. اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید ریشه‌های معادله‌ی زیر همیشه حقیقی‌اند.

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = ۰$$

۶۱. برای کدام مقادیر صحیح k ریشه‌های معادله‌ی زیر گویا هستند؟ ($۱ < k < ۱۳$)

$$kx^۲ - (۱ - ۲k)x + k = ۲$$

۶۲. اگر حوزه‌ی تعریف کسر $\frac{x+۳}{x^۲+ax+b}$ برابر با $D = R - \{۲\}$ باشد a و b را تعیین کنید.

۶۳. مقدار a را در معادله‌ی زیر چنان تعیین کنید که $x_۱^۲ + x_۲^۲$ مینیمم باشد.

$$x^۲ - ax + a - ۱ = ۰$$

۶۴. ثابت کنید معادلات زیر دارای ریشه‌های حقیقی‌اند.

$$\text{الف) } \frac{۱}{x-a} + \frac{۱}{x-b} = \frac{۱}{c^۲} \quad \text{ب) } (a-b+۱)x^۲ + ۲x + b - a + ۱ = ۰$$

۶۵. ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - px + q = ۰$ دو عدد صحیح متوالی‌اند. ثابت کنید:

$$p^۲ - ۴q = ۱$$

۶۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - px + q = ۰$ باشند، معادله‌ای تشکیل دهید

که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta^۲}$ و $\frac{\beta}{\alpha^۲}$ باشد.

۶۷. معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. ثابت کنید به ازای همه‌ی مقادیر m معادله‌ی زیر نیز دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$3x^2 + 2(a+m)x + ma + b = 0.$$

۶۸. نشان دهید معادله‌ی $x^2 - 2bx + 2b^2 - a^2 = 0$ به ازای جمیع مقادیر a و b دارای جواب است و جواب‌های معادله را به دست آورید.

۶۹. نشان دهید معادله‌ی $x^2 - 2ax + 3a^2 + b^2 = 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۷۰. α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند. اولاً معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش α^{-3} و β^{-3} باشند. ثانیاً با فرض $\alpha\beta^2 = 1$ ثابت کنید:

$$a^3 + c^3 + abc = 0.$$

۷۱. ثابت کنید هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - (2m + 2n)x + 2n = 0$ گویا هستند. $(m, n \in \mathbb{Q})$.

۷۲. ثابت کنید ریشه‌های معادله‌ی $(x^2 - 1) = (b - c)x$ همواره حقیقی می‌باشند.

۷۳. مقدار k را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 2k = 0$ دو برابر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + k = 0$ باشد.

۷۴. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

ب) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$

ج) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$

د) $6x^6 - 5x^5 - 32x^4 - 10x^3 - 32x^2 - 5x + 6 = 0$

۷۵. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 = 8$$

۷۶. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$$

(راهنمایی: صورت و مخرج هریک از کسرهای طرف اول را بر $x \neq 0$ تقسیم کنید و

$$y = x + \frac{3}{x} \text{ را مجهول کمکی اختیار کنید.})$$

$$۷۷. \text{ معادله‌ی } \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right) \text{ را حل کنید.}$$

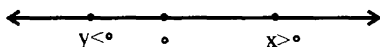
$$(راهنمایی: $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ را در نظر بگیرید.)$$

👉 فصل سیزدهم

نامساوی‌ها و نامعادلات

☆ اصول نامساوی‌ها

می‌دانیم بر روی محور اعداد حقیقی عدد صفر مبدأ مقایسه‌ی اعداد می‌باشد. هر عدد مانند x واقع در سمت راست صفر را مثبت نامیده می‌نویسیم $x > 0$ و هر عدد مانند y واقع در سمت چپ صفر را منفی نامیده و می‌نویسیم $y < 0$.



به این ترتیب می‌توان گفت که \mathbb{R} اجتماع سه مجموعه‌ی جدا از هم به صورت زیر است.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\} \cup \{0\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

برای راحتی کار، مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی را با \mathbb{R}^- و مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را

با \mathbb{R}^+ نشان می‌دهیم. لذا می‌توان گفت: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

\mathbb{R}^+ و \mathbb{R}^- را به صورت زیر نیز با علائم ریاضی تعریف می‌کنند.

$$\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = k^{\vee}, k \neq 0\}$$

$$\mathbb{R}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{R}^+\}$$

پس به ازاء هر $x \in \mathbb{R}$ می‌توان نوشت: $x \in \mathbb{R}^-$ یا $x \in \mathbb{R}^+$ یا $x = 0$. می‌پذیریم که

\mathbb{R}^+ نسبت به جمع و ضرب بسته است و \mathbb{R}^- نسبت به جمع بسته است. یعنی به ازای هر

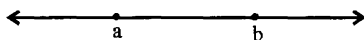
$x, y \in \mathbb{R}^+$ از $x + y \in \mathbb{R}^+$ و $xy \in \mathbb{R}^+$

و به ازای هر x و y از \mathbb{R}^- :

$$x + y \in \mathbb{R}^-$$

☆ تعریف رابطه‌ی کوچک‌تری «<»

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند که بر روی محور a سمت چپ b باشد. در این صورت گوییم a ، کوچک‌تر از b است و می‌نویسیم $a < b$.



در این حالت همچنین می‌توان گفت که b از a بزرگ‌تر است و نوشت $b > a$. به عبارت دیگر:

$$a < b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^-$$

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$$

مثال ۱:

$$2 - 3 = -1 \in \mathbb{R}^- \Rightarrow 2 < 3$$

$$\frac{-1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-5}{6} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{1}{3}$$

$$3 - 3 = 0 \notin \mathbb{R}^-, 3 - 3 = 0 \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow 3 \not< 3$$

قضیه: به ازاء هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید فقط یکی از عبارت‌های زیر صحیح است.

$$a = b \text{ یا } a < b \text{ یا } a > b$$

برهان: $a - b$ را در نظر بگیرید. اگر $a - b = 0$ آن‌گاه $a = b$. فرض کنیم $a - b \neq 0$ در این صورت $a - b \in \mathbb{R}^-$ یا $a - b \in \mathbb{R}^+$ و از آن‌جا به دست می‌آید که $a < b$ یا $b < a$ که حکم ثابت می‌شود.

قضیه: به ازای هر سه عدد حقیقی a ، b و c ثابت کنید: (خاصیت تعدی)

$$a < b \text{ و } b < c \Rightarrow a < c$$

برهان:

$$\begin{array}{l} a < b \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}^- \\ b < c \Rightarrow b - c \in \mathbb{R}^- \end{array} \xrightarrow[\text{نسبت به جمع}]{\text{بسته بودن } \mathbb{R}^-} (a - b) + (b - c) \in \mathbb{R}^-$$

$$\Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^- \Rightarrow a < c$$

قضیه: به ازاء هر سه عدد حقیقی a ، b و c ثابت کنید:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

یعنی می‌توان به طرفین نامساوی، عددی را افزود.

اثبات: $a < b \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow a - b + c - c \in \mathbb{R}^-$

$$\Rightarrow (a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^- \Rightarrow a + c < b + c$$

قضیه: به ازاء هر سه عدد حقیقی a ، b و c ثابت کنید:

$$a < b \Rightarrow a - c < b - c$$

یعنی می‌توان از طرفین یک نامساوی عددی را کم کرد.

اثبات: به عهده‌ی دانش‌آموز.

قضیه: اگر a و $b \in \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$a < b \Rightarrow ac < bc$$

یعنی طرفین یک نامساوی را می‌توان در عددی مثبت ضرب کرد که در این صورت جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

اثبات: $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$ و $c \in \mathbb{R}^+$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به ضرب}]{\text{بسته بودن } \mathbb{R}^+} (b - a) \times c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac < bc$$

قضیه: اگر a و $b \in \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}^-$ ، ثابت کنید:

$$a < b \Rightarrow ac > bc$$

یعنی اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود.

اثبات: چون $c \in \mathbb{R}^-$ ، لذا $-c \in \mathbb{R}^+$ ، بنابر قضیه‌ی فوق:

$$a < b, -c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -ac < -bc$$

$$\Rightarrow -ac - (-bc) \in \mathbb{R}^- \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^-$$

$$\Rightarrow bc < ac \Rightarrow ac > bc$$

قضیه: اگر $a > 0$ و $b < 0$ ، ثابت کنید $ab < 0$.

$$a > 0, b < 0 \Rightarrow ba < 0 \times a \Rightarrow ab < 0$$


اثبات:

قضیه: اگر $a < 0$ و $b < 0$ ، ثابت کنید $ab > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بنابر قضیه}} a \times b > 0 \times b \Rightarrow ab > 0$$

اثبات:

مثال ۲: نشان دهید اگر $a \in \mathbb{R}^-$ آن گاه $a^2 \in \mathbb{R}^+$.


 حل:

$$a < 0, a < 0 \Rightarrow a \times a > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$$

بنابر قضیه‌ی بالا:

مثال ۳: نشان دهید اگر $a \in \mathbb{R}^-$ آن گاه اگر n فرد باشد $a^n < 0$ و اگر n زوج باشد

$$a^n > 0$$

 حل:

به عهده‌ی دانش‌آموز.

مشخص است که بنابر توضیحات فوق اگر $a > 0$ یا $a < 0$ باشد آن گاه $a^2 > 0$ در حالت

$$\text{خاص } 1 = 1^2 \in \mathbb{R}^+$$

قضیه: اگر $a > 0$ ، ثابت کنید $\frac{1}{a} > 0$.

اثبات: می‌دانیم $\frac{1}{a} \neq 0$ فرض کنیم $\frac{1}{a} < 0$ (فرض خلف) در این صورت:

$$a > 0, \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a \times \frac{1}{a} < 0 \times \frac{1}{a} \Rightarrow 1 < 0 \Rightarrow 1 \in \mathbb{R}^-$$

که این با $1 \in \mathbb{R}^+$ تناقض دارد. بنابراین فرض خلف باطل است. پس $\frac{1}{a} > 0$.

قضیه: اگر $a < 0$ ثابت کنید $\frac{1}{a} < 0$.

اثبات:

$$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow \frac{1}{-a} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

این دو قضیه نشان می‌دهند که \mathbb{R}^+ و \mathbb{R}^- نسبت به عمل وارون کردن بسته‌اند.

قضیه: اگر $a < b$ و $a, b \in \mathbb{R}^+$ و نشان دهید $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

اثبات: چون $a, b \in \mathbb{R}^+$ و \mathbb{R}^+ نسبت به ضرب بسته است، لذا $ab \in \mathbb{R}^+$ و از آنجا

$$\frac{1}{ab} \in \mathbb{R}^+ \text{ داریم}$$

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}^+, a < b \\ \frac{1}{ab} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{ab} \times a < \frac{1}{ab} \times b \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{array}$$

قضیه: اگر $a < b$ و $a, b \in \mathbb{R}^-$ و نشان دهید $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

اثبات: چون $b \in \mathbb{R}^-$ و $a \in \mathbb{R}^-$ بنا بر قضیه‌های خوانده شده $ab \in \mathbb{R}^+$ و لذا $\frac{1}{ab} \in \mathbb{R}^+$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}^-, a < b \\ \frac{1}{ab} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{ab} \times a < \frac{1}{ab} \times b$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

دو قضیه‌ی فوق نشان می‌دهند که طرفین یک نامساوی را به شرط آن که هر دو طرف نامساوی هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) می‌توان وارون کرد. در این صورت جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال ۴: اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ و $b, d > 0$ ، ثابت کنید $ad < bc$ و بالعکس.

حل: 

چون $b, d > 0$ لذا $bd > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ bd > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow bd \times \frac{a}{b} < bd \times \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc$$


اینک فرض کنیم $ad < bc$ و $b, d > 0$ پس $bd > 0$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} ad < bc \\ bd > 0 \Rightarrow \frac{1}{bd} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ad \times \frac{1}{bd} < bc \times \frac{1}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

پس اگر $b, d > 0$ آن‌گاه:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc}$$


مثال ۵: اگر $a < 0$ و $b > 0$ ، ثابت کنید $\frac{a}{b} < 0$.

حل: 

$$a \in \mathbb{R}^-, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^-, \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$$


مثال ۶: اگر $a > 0$ و $b < 0$ ، ثابت کنید $\frac{a}{b} < 0$.

حل: 

$$a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow a \times \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^-$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \frac{a}{b} < 0.$$

مثال ۷: اگر $a < b$ ، ثابت کنید $a < \frac{a+b}{2} < b$.

حل: 

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

$$a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

☆ بازه (فاصله)

مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را یک بازه می‌نامیم. اگر $a < b$ باشد آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

مجموعه‌ی A را با نمادهای (a, b) یا $]a, b[$ نیز نشان می‌دهند. اگر مجموعه‌ی A شامل a یا b باشد هر دو عضو a و b باشند می‌توانیم آن را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = [a, b) =]a, b[$$


$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} = (a, b] =]a, b]$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از a را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\} = (-\infty, a)$$

مثال ۸: بازه‌های $(2, 5]$ ، $[-3, 7]$ ، $[7, 13)$ ، $(-\infty, 9)$ و $[-6, +\infty)$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

حل: 

$$(2, 5] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 5\}$$

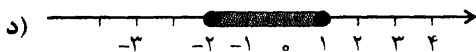
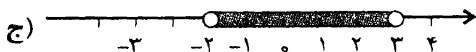
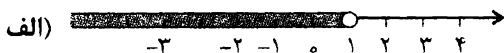
$$[-3, 7] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 7\}$$


$$[7, 13) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 7 \leq x < 13\}$$

$$(-\infty, 9) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 9\}$$

$$[-6, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -6 \leq x\}$$

مثال ۹: هریک از نمودارهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید.



حل: 


الف) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1\} = (-\infty, 1)$

ب) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} = (-\infty, 1]$

ج) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\} = (-2, 3)$


د) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 1\} = [-2, 1]$

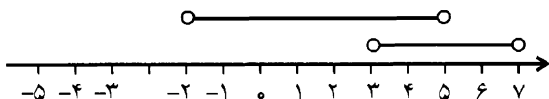
مثال ۱۰: در بازه‌ی $[-2, 5]$ چند عدد صحیح وجود دارد؟ آن‌ها را نام ببرید.

حل: 

هفت عدد صحیح که عبارتند از: -1 و 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 .


مثال ۱۱: حاصل $(-۲, ۵) \cap (۳, ۷)$ چیست؟

حل: 



$$(۳, ۷) \cap (-۲, ۵) = (۳, ۵)$$


مثال ۱۲: حاصل $(-۵, ۵) \cap (-۲, ۲)$ چیست؟

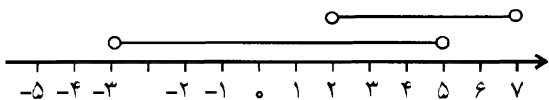
حل: 

با توجه به این که $(-۲, ۲) \subset (-۵, ۵)$ می‌باشد می‌توان گفت:

$$(-۵, ۵) \cap (-۲, ۲) = (-۲, ۲)$$


مثال ۱۳: حاصل $(-۳, ۵) \cup (۲, ۷)$ چیست؟

حل: 




$$(-۳, ۵) \cup (۲, ۷) = (-۳, ۷)$$

مثال ۱۴: حاصل $(-۱, ۱) \cap \left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \cap \left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}\right) \cap \dots \cap \left(-\frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۰}\right)$ چیست؟

حل: 

بازه $\left(-\frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۰}\right)$ زیرمجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های دیگر می‌باشد. بنابراین اشتراک همه‌ی بازه‌ها بازه $\left(-\frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۰}\right)$ است.

مثال ۱۵: اگر $۰ < a < ۱$ ، ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی مانند n داریم: $۰ < a^n < ۱$.

حل: 

$$\left. \begin{matrix} a < 1 \\ a > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a^2 < a \\ a < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a^2 < 1 \\ a > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a^3 < a \\ a < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^3 < 1$$

به همین ترتیب $a^n < 1$. چون $a > 0$ پس هر توانی از a نیز مثبت است. لذا

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^n < 1$$

مثال ۱۶: اگر $0 < a < 1$ و m و n دو عدد صحیح باشند که $m < n$. ثابت کنید

$$a^m > a^n$$

 **حل:**

$$m, n \in \mathbb{Z}, m < n \Rightarrow n - m > 0 \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$$


$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^{n-m} < 1$$

بنابر مثال قبل:

از آن جا خواهیم داشت:


$$\left. \begin{array}{l} 0 < \frac{a^n}{a^m} < 1 \\ a^m > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < a^n < a^m \Rightarrow a^m > a^n$$

مثال ۱۷: اگر $0 < a < 1$ باشد $a^{-۷}$ و $a^{-۳}$ و $a^{۱۰}$ را مقایسه کنید.


 **حل:**

$$a^{-۷} > a^{-۳} > a^{۱۰}$$

با توجه به مثال بالا:

 **نکته:** اگر a و b و c اعداد مثبت بوده و داشته باشیم $a < b$ و $c < d$ آن گاه

$$ac < bd$$

 **نکته:** اگر a و b مثبت باشند و $a < b$ ، آن گاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

نامساوی میانگین حسابی و هندسی

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند $\frac{a+b}{2}$ را میانگین حسابی و در صورت متحدالعلامه بودن a

و b ، \sqrt{ab} را میانگین هندسی a و b می گویند.

در حالت کلی اگر a_1, a_2, \dots, a_n اعداد حقیقی باشند، $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ را میانگین

حسابی و $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ را (در صورت معنی دار بودن) میانگین هندسی این اعداد می گویند.

قضیه: به ازاء هر دو عدد حقیقی نامنفی ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اثبات: در این قضیه می‌خواهیم نشان دهیم که به ازاء هر دو عدد حقیقی نامنفی، میانگین حسابی آن دو عدد از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست. چون a و b اعداد نامنفی‌اند \sqrt{a} و \sqrt{b} موجود است داریم:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$


شرط تساوی در این قضیه زمانی برقرار است که $a = b$.

قضیه‌ی فوق به ازاء هر n عدد حقیقی نامنفی برقرار است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

این قضیه به قضیه‌ی نابرابری میانگین حسابی و هندسی معروف است و باز هم تساوی زمانی رخ می‌دهد که داشته باشیم: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$


مثال ۱۸: اگر $x > 0$ ، نشان دهید: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

 حل:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

بنابر قضیه‌ی فوق:


مثال ۱۹: اگر $x < 0$ ، ثابت کنید $-2 \leq x + \frac{1}{x}$.

 حل:

چون $x < 0$ در نتیجه $-x > 0$ و می‌توان قضیه را برای $-x$ به کار برد.

$$\frac{-x + \left(-\frac{1}{x}\right)}{2} \geq \sqrt{(-x) \times \left(\frac{-1}{x}\right)} \Rightarrow -\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

مثال ۲۰: a, b, c سه عدد مثبت‌اند. ثابت کنید: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

حل: 

بنابر نامساوی میانگین حسابی و هندسی داریم:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

همچنین:


$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

با استفاده از مثال:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \times 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9$$

مثال ۲۱: به ازاء هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

حل: 

می‌دانیم اگر a و b مثبت باشند آن‌گاه: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. (نامساوی میانگین حسابی و هندسی) کافیت نشان دهیم.

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (۲) \quad \text{و} \quad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \quad (۱)$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی و هندسی:

$$a, b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$


همچنین:

$$a, b > 0 \Rightarrow a^2, b^2 > 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \times b^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ را میانگین همساز (توافقی) و $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ را جذر میانگین مربعات a و b گویند.

مثال ۲۲: اگر $y = \frac{x^2}{x^2 + 25}$ ، نشان دهید $0 \leq y \leq \frac{1}{10}$.

حل: 

بدیهی است که $y \geq 0$ است. فرض کنیم $y \neq 0$ ، در این صورت:

$$\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 25}{x^2} = x^2 + \frac{25}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{25}{x^2}} = 10 \Rightarrow y \leq \frac{1}{10}$$

نامعادله: نامساوی‌هایی مانند $2x - 1 < 3$ و $2x - 7 > 3x + 1$ را نامعادله می‌نامیم هدف از حل نامعادله پیدا کردن مجموعه‌ی اعدادی است که تمام اعضای آن در نامعادله صدق کنند.

مثال ۲۳: مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $2x - 1 < 3$

ب) $3x - 2 \geq 2x - 5$

ج) $\frac{x-1}{3} < 1$

د) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+1}{2} \geq x$

حل: 

الف) $2x - 1 < 3 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2 \quad A = (-\infty, 2)$

ب) $3x - 2 \geq 2x - 5 \Rightarrow 3x - 2x \geq 2 - 5 \Rightarrow x \geq -3 \quad B = [-3, +\infty)$

$$\text{ج) } \frac{x-1}{3} < 1 \Rightarrow x-1 < 3 \Rightarrow x < 4 \quad C = (-\infty, 4)$$


$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+1}{2} \geq x \Rightarrow 2(2x-1) - 3(3x+1) \geq 6x$$

$$\Rightarrow 4x - 2 - 9x - 3 \geq 6x \Rightarrow -5x - 5 \geq 6x \Rightarrow -11x \geq 5 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{11}$$

$$D = \left(-\infty, -\frac{5}{11} \right]$$

مثال ۲۴: نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$$

حل: 

$$60 \times \frac{5x-1}{4} - 60 \times \frac{3x-13}{10} > 60 \times \frac{5x+1}{3}$$


$$15(5x-1) - 6(3x-13) > 20(5x+1)$$

$$75x - 15 - 18x + 78 > 100x + 20$$

$$57x + 63 > 100x + 20 \Rightarrow -43x > -43 \Rightarrow x < 1$$

مثال ۲۵: نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$$

حل: 

$$70 \times \frac{3x-1}{5} - 70 \times \frac{x+1}{2} < 70 - 70 \times \frac{x}{7}$$

$$14(3x-1) - 35(x+1) < 70 - 10x$$

$$42x - 14 - 35x - 35 < 70 - 10x$$

$$7x - 49 < 70 - 10x \Rightarrow 17x < 119 \Rightarrow x < 7$$

مثال ۲۶: حداقل مقدار عدد طبیعی n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:


$$n^{300} \geq 81^{450}$$

حل: 

$$n^{300} \geq 81^{450} \Rightarrow n^{300} \geq 9^{900} \Rightarrow n^{300} \geq (9^3)^{300} \Rightarrow n \geq 9^3 = 729$$

حداقل مقدار طبیعی n برابر ۷۲۹ است.

مثال ۲۷: مقادیر طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم: $16^{2n-1} > 8^{n+7}$.


حل: 

$$16^{2n-1} > 8^{n+7} \Rightarrow 2^{8n-4} > 2^{3n+21} \Rightarrow 8n-4 > 3n+21 \Rightarrow 5n > 25$$

$$\Rightarrow n > 5 \quad n \in \{6, 7, 8, 9, \dots\}$$

مثال ۲۸: حداقل مقدار عدد طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1377}{1380}$$

حل: 

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

⋮


$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1377}{1380} \Rightarrow \frac{n}{n+1} > \frac{1377}{1380}$$

$$\Rightarrow 1380n > 1377(n+1) \Rightarrow n > 459$$

پس حداقل مقدار طبیعی n برابر ۴۶۰ است.

مثال ۲۹: حداقل مقدار n چقدر باشد تا: $1 + 2 + 3 + \dots + n > 66$.

حل: 

به راحتی می‌توان دید که $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} > 66 \Rightarrow n(n+1) > 132 \Rightarrow n(n+1) > 11 \times 12$$


می‌دانیم n و $n+1$ دو عدد متوالی‌اند. نامساوی اخیر نشان می‌دهد که باید داشته باشیم $n > 11$ و چون n عددی طبیعی است، حداقل مقدار n برابر ۱۲ است.

☆ دستگاه نامعادلات (نامعادلات توأم)

گاهی اوقات با نامعادله‌هایی مواجه می‌شویم که متغیر آن‌ها همزمان باید در بیش از یک شرط صدق کند. یافتن جواب برای این نامعادله منجر به حل یک دستگاه نامعادله می‌شود.

مثال ۱۳۰: مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $3 \leq 2x - 1 < 5$ ب) $-3 < \frac{x+1}{5} \leq -1$

حل: 

$$\text{الف) } 3 \leq 2x - 1 < 5 \Rightarrow 3 + 1 \leq 2x < 5 + 1 \Rightarrow \frac{4}{2} \leq x < \frac{6}{2}$$


$$\Rightarrow 2 \leq x < 3 \quad A = [2, 3)$$

$$\text{ب) } -3 < \frac{x+1}{5} \leq -1 \Rightarrow 5 \times (-3) < x+1 \leq 5 \times (-1) \Rightarrow -15 - 1 < x < -5 - 1$$

$$\Rightarrow -16 < x \leq -6 \quad A = (-16, -6]$$

مثال ۱۳۱: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 3x - 2 \\ 5x - 2 < 7x + 4 \end{cases}$$

حل: 

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص می‌کنیم. اشتراک آن‌ها مجموعه جواب دستگاه خواهد بود.


$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 3x - 2 \\ 5x - 2 < 7x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3x \geq -2 - 1 \\ 5x - 7x < 4 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \geq -3 \\ -2x < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = (-\infty, 3] \\ B = (-3, +\infty) \end{matrix}$$

$$A \cap B = (-3, 3]$$

مثال ۳۲ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < \frac{3-x}{5} \\ 1 - \frac{2(x-1)}{3} < \frac{3-x}{2} \end{cases}$$


حل: 

$$\begin{cases} 15 \times \frac{2x-1}{3} < 15 \times \frac{3-x}{5} \\ 6 - 6 \times \frac{2(x-1)}{3} < 6 \times \frac{3-x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 5 < 9 - 3x \\ 6 - 4x + 4 < 9 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x < 14 \\ -x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{14}{13} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \frac{14}{13}$$

مثال ۳۳ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$5 - 2x \leq \frac{2x-1}{3} \leq 3$$

حل: 


$$\begin{cases} 5 - 2x \leq \frac{2x-1}{3} \\ \frac{2x-1}{3} \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 - 6x \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x \leq -16 \\ 2x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 5$$

مثال ۳۴ : یک استخر شنا ۲۰۰۰ تومان ورودی می‌گیرد و به ازای هر ساعت مبلغ ۷۵۰

تومان اضافه می‌گیرد. مسعود ۴۵۰۰ تومان پول دارد او حداکثر چند ساعت می‌تواند


در استخر بماند؟

حل: فرض می‌کنیم او x ساعت در استخر بماند.

$$2000 + 750x \leq 4500 \Rightarrow 750x \leq 2500 \Rightarrow x \leq 3\frac{1}{3}$$

مسعود حداکثر ۳ ساعت می‌تواند در استخر بماند.

مثال ۳۵: چند جفت عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموع آن‌ها از ۵۰ کوچک‌تر باشد ولی از ۳۰ کوچک‌تر نباشد.

حل: 

$$30 \leq x + (x + 1) < 50$$

$$30 \leq 2x + 1 < 50 \Rightarrow 29 \leq 2x < 49 \Rightarrow \frac{29}{2} \leq x < \frac{49}{2} \Rightarrow 14\frac{1}{2} \leq x < 24\frac{1}{2}$$

بنابراین x یکی از اعداد ۱۵ تا ۲۴ می‌باشند که تعداد آن‌ها ۱۰ تا است.

مثال ۳۶: تعداد کتب علمی در یک کتابخانه برابر با $\frac{11}{13}$ تعداد کتاب‌های هنری این

کتابخانه می‌باشد. برای انتقال کتابخانه به شهری دیگر، کتاب‌ها را در دو واگن جا

داده‌اند. $\frac{1}{15}$ کتب علمی و $\frac{18}{19}$ کتب هنری در واگن اول و بقیه در واگن دوم قرار

دارند. اگر بدانیم در واگن اول بیش از ۱۰۰۰۰ کتاب و در واگن دوم کم‌تر از ۱۰۰۰۰

کتاب جا گرفته است، تعداد کتب علمی و هنری کتابخانه را تعیین کنید.

حل: 

فرض کنیم x تعداد کتب هنری باشد. با توجه به فرض مسئله تعداد کتاب‌های علمی $\frac{11}{13}x$

است و داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{15} \times \frac{11}{13}x + \frac{18}{19}x > 10000 \\ \frac{14}{15} \times \frac{11}{13}x + \frac{1}{19}x < 10000 \end{cases}$$

اولاً: دستگاه فوق نشان می‌دهد که x باید مضربی از $15 \times 13 \times 19 = 3705$ باشد.

ثانیاً: اگر هر دو نامعادله‌ی دستگاه را ساده کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{37050000}{3719} < x < \frac{37050000}{3121}$$

که از آن جا بدست می‌آید: $9963 \leq x \leq 11871$. قرار می‌دهیم $x = 3705k$.

خواهیم داشت: $2/68 \leq k \leq 3/2$

که تنها جواب صحیح برای k عبارتست از: $k = 3$. پس مقدار x خواهد شد:

$x = 3 \times 3705 = 11115$. یعنی تعداد کتاب‌های هنری ۱۱۱۱۵ و تعداد کتاب‌های علمی

$$\frac{11}{13} \times 11115 = 1405 \text{ می‌باشد.}$$

تمرین‌های فصل سیزدهم

۱. اگر $a > \frac{1}{3}$ ، ثابت کنید: $\frac{1}{3} < \frac{8a+1}{3a+10} < a$.

۲. اگر $a > 2$ ، نشان دهید: $2 < \frac{5a+2}{a+4} < a$.

۳. طرف دوم تساوی‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

الف) $(-1, 2] \cap [0, 3)$

ب) $(-3, 2] \cap (-2, 3] \cap (-1, 4]$

ج) $(-3, 2] \cup [-2, 1)$

د) $(-10, 5] \cup [-8, 10)$

هـ) $(-1, 1) - \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

و) $[-2, 2] - (-1, 1)$

ز) $(-\infty, 0) \cap (-4, +\infty)$

ح) $(0, +\infty) - (5, +\infty)$

۴. اگر a عددی مثبت باشد به کمک اتحادها ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

۵. ثابت کنید $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

۶. ثابت کنید $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

۷. ثابت کنید $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

۸. اگر a و b اعدادی مثبت باشند ثابت کنید.

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

۹. اگر a و b اعدادی مثبت باشند ثابت کنید.

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

۱۰. اگر $ab < 0$ باشد ثابت کنید $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

۱۱. ثابت کنید $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

۱۲. ثابت کنید $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$.

۱۳. ثابت کنید $3a^2 + 2b^2 - 2b + 2a + 1 > 0$.

۱۴. اعداد 31^{11} و 17^{14} را مقایسه کنید.

۱۵. فرض کنید $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}$ و $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{98}{99}$. ثابت کنید

$$A < B < 2A$$

۱۶. کسرهای $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ را با مخرج مثبت در نظر بگیرید. ثابت کنید کسر

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

نیست.

۱۷. مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{2x+1}{3} - 1 < x$

ب) $\frac{-2(x-1)}{3} - \frac{3(x+1)}{2} \geq 5$

ج) $\frac{x-1}{2} \leq \frac{2}{3} < \frac{2x-1}{5}$

د) $\frac{-1}{2} < \frac{2x-1}{3} < \frac{2}{7}$

هـ) $\frac{2x-3}{x^2+1} < 0$

و) $\frac{(x+1)^2}{3x-4} \leq 0$

ز) $x + \frac{1}{x} < 0$

ح) $-2(3x+4) - (2-x) \geq 1-4x$

ط) $\frac{8x+5}{9} - \frac{2x+23}{6} > \frac{x+4}{4} - \frac{x}{12}$

۱۸. مجموعه‌ی جواب هریک از دستگاه‌های نامعادلات زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف)} \begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{1-x}{2} \leq x \\ \frac{2x+1}{3} - \frac{3x+1}{2} < x \end{cases}$$

$$\text{ب)} \begin{cases} 2x+1 < \frac{-3x+1}{5} \leq -x \\ x+1 \leq \frac{1-x}{4} \leq x+10 \end{cases}$$

$$\text{ج)} \begin{cases} 9x-15 > 4x+13 \\ 19-5x > 7+3x \end{cases}$$

$$\text{د)} \begin{cases} 2x+5 > 5x-4 \\ x-7 < 2x-3 \end{cases}$$

$$\text{ه)} \begin{cases} \frac{x+5}{6} + \frac{x+9}{8} > \frac{2x+7}{9} \\ \frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} < \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\text{و)} \begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{4(2x-3)}{9} < \frac{5x+1}{8} \\ \frac{5x+9}{3} + \frac{7x+5}{9} > \frac{3x+21}{4} \end{cases}$$

$$\text{ز)} \begin{cases} \frac{5x+7}{4} + \frac{3x+5}{8} > \frac{9x+4}{5} \\ \frac{3x-2}{18} + \frac{2x-9}{45} > \frac{x+3}{10} \end{cases}$$

$$\text{ح)} \begin{cases} \frac{13x-16}{15} + \frac{x-22}{35} < \frac{x-6}{21} \\ \frac{5x+12}{14} + \frac{11x+28}{2} > \frac{4x+9}{77} \end{cases}$$

$$\text{ط)} \begin{cases} 2x+5 < 14-x \\ x(x+4) < (x+3)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{ی)} \begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{x-3}{6} > \frac{2x-5}{2} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{5x+2}{6} > \frac{4x+1}{4} \end{cases}$$

$$\text{ک)} \frac{x-5}{3} < 2x-5 \leq \frac{1-x}{2}$$

۱۹. تعداد اعداد صحیحی را که در دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کنند مشخص کنید.

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{3} - x < 5 \\ \frac{x-1}{2} + 5x \leq 7 \end{cases}$$

۲۰. نمرات ۲۰ درس دانش‌آموزی چنان است که در ۶ درس ۲۰ گرفته و در بقیه درس‌ها حداکثر ۱۶ گرفته است. اگر میانگین نمرات عددی صحیح باشد، بزرگ‌ترین مقدار این میانگین چه عددی می‌تواند باشد؟

۲۱. اعداد طبیعی n را چنان تعیین کنید که به ازاء آن‌ها نامعادله زیر برقرار باشد.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{255}{128}$$

۲۲. مقادیر طبیعی n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} > 0.99$$

۲۳. کم‌ترین مقدار عدد طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) \geq 2n^2 - 3n + 1379$$

۲۴. کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به ازاء آن نامعادله‌ی زیر برقرار باشد چیست؟

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq 100$$

۲۵. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0.01$$



از مؤلفان این کتاب، آثار زیر نیز منتشر شده است:



ISBN: 978-964-07-1154-5



9 789640 711543

انتشارات مبتکران www.mobtakeran.com

تهران، خیابان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان وحید نظری، پلاک ۵۹

کدپستی: ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱ تلفکس: ۹۲ - ۶۶۹۵۴۳۹۰

e-mail: info@mobtakeran.com

مرکز پخش: تهران، صندوق پستی: ۱۳۱۴۵ - ۱۵۹۶

تلفکس: ۹۵ - ۶۶۹۵۴۳۹۳